

# LA STRUCTURE PAR TERME DES PRIX DES COMMODITES : ANALYSE THEORIQUE ET APPLICATIONS AU MARCHE PETROLIER

Janvier 2000

L'Université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur.

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE .....	11
PREMIERE PARTIE : LES THEORIES TRADITIONNELLES DES PRIX DES COMMODITES ..	25
Introduction .....	27
Chapitre 1 : La théorie du déport normal .....	29
Chapitre 2 : La théorie du stockage .....	63
Conclusion .....	113
SECONDE PARTIE : LES MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX DES COMMODITES .....	115
Introduction .....	117
Chapitre 3 : Les modèles de structure par terme des prix des commodités : une revue de la littérature.....	119
Chapitre 4 : Trois modèles de structure par terme des prix ; une comparaison.....	155
Conclusion.....	187
TROISIEME PARTIE : APPLICATIONS AU MARCHE DU PETROLE BRUT.....	189
Introduction.....	191
Chapitre 5 : Etude comparative des performances de modèle de Schwartz et du modèle asymétrique .....	193
Chapitre 6 : Etudes de projets d'investissement .....	229
Conclusion .....	259
CONCLUSION GENERALE .....	261
Bibliographie .....	273
Annexes .....	289
Liste des tableaux et des figures.....	411
Table des matières détaillée .....	415



## **INTRODUCTION GENERALE**

Vendredi 6 juillet 1994, 20 heures. Le soleil se couche sur les bureaux de la Défense. Au 45<sup>e</sup> étage de la tour d'une grande compagnie pétrolière, le directeur des études stratégiques interroge :

« - quelle est l'information donnée par un prix à terme ?  
- les marchés à terme et les techniques utilisées par les opérateurs de ces marchés peuvent-ils être employés par un producteur du marché pétrolier dans le cadre de stratégies d'investissement, pour décider de la mise en exploitation d'un gisement ou pour déterminer sa valeur ? »

Ces quelques phrases, formulées en une ou deux minutes, ont occupé cinq années de ma vie. Elles constituent les questions initiales de cette thèse.

La première question dessine le cadre théorique dans lequel se situent ces travaux, à savoir la formation des prix à terme dans un marché de commodités et l'explication de la relation entre le prix au comptant du marché physique et les prix à terme. La relation inter temporelle entre le prix au comptant d'une commodité et tous les prix à terme à un instant donné constitue la structure par terme des prix. Celle-ci rassemble l'information utile à toutes les opérations de couverture, d'arbitrage ou de spéculation, pour toutes les échéances de livraison.

Bien qu'il existe aujourd'hui, dans tous les marchés de commodités, des marchés dérivés et des instruments de couverture très variés (options, swaps, etc.), seuls les marchés de contrats à terme ayant pour sous-jacent des marchandises sont ici étudiés, afin de centrer l'analyse sur l'articulation entre marché physique et marché papier. Les travaux théoriques et empiriques réalisés dans cette thèse

pourront ensuite être employés pour des études portant sur d'autres marchés dérivés de commodités.

La seconde question détermine les travaux empiriques réalisés et oriente l'analyse théorique vers l'étude des prix à terme pour une échéance éloignée. La décision d'investissement repose sur l'évaluation des flux de trésorerie futurs associés à un projet. Si l'on suppose que les réserves et les coûts d'extraction d'un gisement pétrolier sont connus, sachant que la production peut s'étendre sur plusieurs dizaines d'années, la décision de mise en production de ce gisement dépend de la réponse aux questions suivantes : comment connaître aujourd'hui le prix au comptant auquel sera vendu un baril de pétrole brut produit et livré dans plusieurs années ? Comment fixer dès à présent le profit associé à la vente de ce baril ?

La vente aujourd'hui d'un baril de pétrole avec livraison différée n'est intéressante que si le profit retiré de cette transaction est supérieur ou égal à celui qui aurait été obtenu en vendant le même baril dans plusieurs années. La question posée peut donc être ramenée à celle de la couverture contre les fluctuations du prix au comptant d'une commodité. Pour s'assurer aujourd'hui le bénéfice d'une transaction avec livraison différée, la pratique courante consiste à associer l'opération sur le marché physique à une opération de couverture sur le marché à terme. Dans le cadre d'une opération de couverture traditionnelle, pour une échéance rapprochée, le plus simple moyen de fixer dès aujourd'hui le prix d'achat ou de vente d'un baril pour une livraison à une date  $T$  ultérieure, consiste à utiliser comme prix de transaction le prix à terme correspondant à l'échéance de livraison,  $F(t, T)$ , augmenté de la marge de l'opérateur. Le prix à terme d'échéance  $T$  est en effet une représentation, compte tenu de l'information disponible à ce jour, de ce que sera le prix au comptant à la date  $T$ . Pour s'assurer que la transaction sur le marché physique génère un profit, il faut simultanément initier une position sur le marché à terme, c'est-à-dire vendre ou acheter un contrat à terme d'échéance  $T$ , en prenant sur le marché papier une position inverse à celle détenue sur le marché physique<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Pour des raisons de clarté, cette présentation du mécanisme de couverture est basée sur l'hypothèse simplificatrice selon laquelle le volume et la qualité de la marchandise échangée sur le marché physique correspondent exactement à ceux spécifiés par le contrat à terme.

Sur le marché pétrolier cependant, la structure par terme des prix ne s'étend pas au-delà de trois ans<sup>2</sup>. Lorsqu'il s'agit de développer un gisement dont l'exploitation durera une dizaine d'années, la majorité des échéances de livraison envisagées est supérieure à celles proposées par le marché à terme. Il n'est alors plus possible de recourir à la méthode décrite précédemment pour réaliser une vente avec livraison différée : il manque l'information nécessaire à la fixation du prix sur le marché physique (le prix à terme) et l'instrument de couverture (le contrat à terme). La valorisation d'un baril de pétrole brut produit dans plusieurs années ne peut être effectuée, le produit de la vente ne peut être garanti.

Les questions deviennent donc : peut-on utiliser l'information offerte par les marchés à terme pour valoriser un gisement, donc pour évaluer le prix futur d'un baril de pétrole dont l'échéance de livraison est supérieure à celles proposées par le marché ? Peut-on employer les contrats à terme actuellement commercialisés pour construire des stratégies de couverture allant bien au-delà ?

L'intérêt de ces questions et leur enjeu dépassent la simple recherche du comportement optimal en matière d'exploitation d'un gisement. Dans l'industrie pétrolière, le caractère particulièrement risqué des opérations d'exploration, associé à un temps de retour sur investissement relativement long, interdit en effet le recours à un mode de financement autre que les fonds propres. Or, à condition de disposer de méthodes fiables pour valoriser un gisement et pour couvrir la production future de ce gisement, il est possible d'envisager le cas d'un producteur de pétrole brut vendant sa production à un horizon correspondant à celui de ses projets d'investissement, et utilisant son profit futur ainsi garanti pour servir de collatéral à un financement bancaire. Ce producteur accèderait alors à des sources de financement aujourd'hui inabordables.

---

<sup>2</sup> En réalité, des contrats à terme pour des échéances plus longues sont échangés (en particulier, sur le marché des contrats à terme de produits pétroliers américains - le NYMEX - des contrats ayant une échéance de 87 mois ont récemment été commercialisés), mais le volume de transaction est très faible pour ces maturités.

En réponse à ces questions, la solution explorée dans le cadre de cette thèse est l'élaboration d'un modèle permettant de représenter le plus fidèlement possible la structure par terme des prix pour n'importe quelle échéance, y compris celles non disponibles sur le marché. Ce modèle est une version généralisée de celui développé par Schwartz en 1997, lui-même inspiré des méthodes de valorisation relatives développées dans le cadre des marchés obligataires. Ses paramètres sont estimés en utilisant l'information apportée par les marchés à terme pétroliers, à savoir des séries temporelles de prix à terme pour des échéances de livraison allant jusqu'à neuf mois. Une fois ces paramètres estimés, il est possible d'évaluer un prix à terme pour n'importe quelle échéance, et donc de valoriser un gisement pétrolier. De plus, la valorisation d'un contrat à terme repose sur un raisonnement d'arbitrage conduisant à la construction d'un portefeuille de couverture dont le comportement réplique celui du contrat à terme considéré. Ainsi, elle est intimement liée à l'élaboration de stratégies de couverture permettant de garantir le produit de l'exploitation future du gisement contre les fluctuations des prix des commodités.

Pour construire un tel modèle, il faut en premier lieu comprendre les mécanismes de formation des prix à terme des commodités. La première partie de cette thèse est donc consacrée à l'étude des déterminants des prix à terme, à travers deux théories complémentaires : la théorie du déport normal (premier chapitre) et la théorie du stockage (second chapitre). La théorie du déport normal est très fréquemment employée pour expliquer le comportement des prix dans le marché pétrolier, caractérisé par une situation de déport<sup>3</sup> quasiment permanent. Elle examine la relation entre prix au comptant et prix à terme à partir de l'équilibre des positions de couverture des opérateurs sur le marché à terme. La théorie du stockage explique la différence entre prix à terme et prix au comptant par la présence de coûts de stockage. Ces deux théories constituent la base théorique à partir de laquelle des modèles de structure par terme des prix des commodités peuvent être élaborés.

La thèse principale de la théorie du déport normal, proposée par Keynes en 1930, peut être résumée de la façon suivante : dans des conditions de fonctionnement



normales du marché, le prix à terme est inférieur au prix au comptant. La relation entre ces deux prix est expliquée à partir de l'équilibre des positions de couverture des opérateurs sur le marché à terme. Deux hypothèses sont posées : en premier lieu, les besoins de couverture courte des opérateurs industriels - protection contre le risque de hausse des prix par un achat de contrats à terme- sont supposés être inférieurs à leurs besoins de couverture longue - protection contre le risque de baisse des prix par une vente de contrats à terme. Le recours aux spéculateurs est indispensable pour compenser ce déséquilibre du marché à terme. Pour que ces derniers soient incités à intervenir, il faut que le prix à terme pour une échéance  $T$  soit inférieur prix au comptant anticipé pour cette même échéance. C'est la seconde hypothèse de cette théorie. L'écart entre prix au comptant anticipé et prix à terme est expliqué par la présence d'une prime de risque positive associée au premier de ces deux prix, mais pas au second. Cette dernière rémunère l'activité de prise de risque des spéculateurs.

Le premier chapitre permet d'expliquer les raisons pour lesquelles, à ce jour, la théorie du déport normal n'a été ni validée ni rejetée. Comme le montrent les critiques formulées à l'encontre de cette théorie, il y a peu de raisons pour que la prime de risque associée au prix au comptant, si elle existe, soit positive et stable, comme Keynes le suppose. En effet, la position nette des opérateurs industriels sur les marchés à terme de commodités n'est pas toujours une position de couverture courte. De plus, l'aversion au risque des opérateurs peut varier dans le temps. De ce fait, les résultats des tests empiriques effectués dans le but de valider la théorie du déport normal sont contradictoires : pour un même marché de commodité et différentes périodes d'observations, ils aboutissent à la conclusion selon laquelle le marché est en situation de déport normal ou, inversement, en situation de report<sup>4</sup> normal.

La théorie du stockage explique les situations de report et de déport se manifestant sur un marché à terme de commodités à partir d'une analyse fondée sur

---

<sup>3</sup> Les prix sont en déport lorsque le prix au comptant de la commodité est plus élevé que le prix à terme pour une échéance rapprochée.

<sup>4</sup> Les prix sont en report lorsque le prix au comptant de la commodité est plus faible que le prix à terme pour une échéance rapprochée.

la prise en considération de la présence de stocks sur le marché physique. L'étude des opérations d'arbitrage réalisées par les opérateurs entre marché physique et marché papier permet de comprendre les mécanismes sous tendant l'apparition de situations de report et de déport. Elle conduit de plus à mettre en évidence le fait que la base<sup>5</sup> évolue de façon différente lorsqu'elle est positive et lorsqu'elle est négative. Le niveau du report, sur un marché à terme de commodités, est limité aux coûts de stockage de la marchandise entre la date courante et celle d'échéance du contrat ; ce n'est pas le cas pour le niveau du déport.

Lorsque les stocks sont invoqués pour expliquer la relation entre prix au comptant et prix à terme, l'interprétation des situations de déport est délicate : si le prix à terme est égal au prix au comptant augmenté de coûts de stockage positifs, comment le prix à terme peut-il devenir inférieur au prix au comptant ? De plus, si le prix à terme comprend effectivement le coût de stockage de la marchandise, un opérateur détenant des stocks, s'il vend à terme sa marchandise en situation de report, n'a pas à supporter ce coût. Comment expliquer alors qu'en situation de déport, des stocks sont détenus sans être couverts à terme, alors même que cette opération est coûteuse ? La notion de *convenience yield*, introduite par Kaldor (1939), apporte une réponse à ces différentes questions.

Le *convenience yield* est défini par cet auteur comme le bénéfice qu'un producteur retire de ses stocks s'il dispose de marchandises dès qu'il en a besoin, sans avoir à supporter le coût associé à des commandes fréquentes, ni celui lié à l'attente des livraisons. Ce bénéfice est celui de la disponibilité : il représente le « confort » associé à la détention de stocks, d'autant plus apprécié que le niveau des stocks est faible.

Une grande partie des études réalisées dans le cadre de la théorie du stockage a été consacrée à la définition et à l'analyse du *convenience yield*. Une synthèse de ces dernières permet de proposer une définition exhaustive du *convenience yield*, et une formulation de la relation entre prix au comptant et prix à terme dans un marché de commodité. Cette définition du *convenience yield* est conservée dans la suite de ces travaux.

---

<sup>5</sup> La base est définie comme la différence entre un prix à terme rapproché et le prix au comptant.

La seconde partie de la thèse est centrée sur l'analyse de la relation entre le prix au comptant et les prix à terme pour une échéance éloignée. Les modèles de structure par terme des prix des commodités, inspirés des méthodes de valorisation relative développées dans le domaine obligataire, sont employés pour étudier la structure par terme des prix dans son ensemble et non plus, comme c'était le cas avec les théories traditionnelles, pour expliquer le seul comportement de la base.

A partir d'une revue de la littérature, le chapitre trois analyse de quelle façon les théories traditionnelles sont utilisées pour construire un modèle de structure par terme des prix des commodités. Dans ce type de modèle, les facteurs explicatifs de la relation entre prix au comptant et prix à terme recensés en première partie de cette thèse constituent les variables d'état expliquant le comportement des prix à terme. En retour, le développement de modèles de structure par terme des prix des commodités permet de tester de nouvelles hypothèses et d'apporter des éléments supplémentaires de compréhension du mécanisme de formation des prix dans un marché à terme de commodités.

En particulier, les travaux réalisés à partir de modèles de structure par terme des prix des commodités ont mis en évidence le fait que si le *convenience yield* est effectivement corrélé au prix au comptant, ce que prédit la théorie du stockage, cette corrélation n'est pas parfaite. Par ailleurs, la prise en considération du comportement d'ajustement des opérateurs du marché physique aux variations du prix au comptant et les tests empiriques réalisés dans le cadre des modèles de structure par terme des prix des commodités ont permis de montrer que le comportement dynamique du *convenience yield* et du prix au comptant peut être exprimé par un processus de retour vers une valeur moyenne.

Le chapitre quatre présente trois modèles de structure par terme des commodités, dans l'objectif de les comparer. Parmi eux, deux constituent une référence dans le domaine des commodités. Le modèle monofactoriel développé par Brennan et Schwartz en 1985 représente la version la plus simple de modèle stochastique appliqué aux marchés de commodités. Dans ce cas, l'unique variable d'état déterminant le comportement des prix à terme est le prix au comptant. Le

modèle proposé par Schwartz en 1997 comporte deux variables d'état : le prix au comptant et le *convenience yield*. Il a inspiré de nombreux travaux. Le troisième modèle, élaboré dans le cadre de cette thèse, suppose comme le précédent que les deux principales variables explicatives des prix à terme sont le prix au comptant et le *convenience yield*. Dans ce dernier modèle, la dynamique du *convenience yield* est asymétrique, hypothèse fondée sur l'étude de la formation des prix des commodités réalisée en première partie de cette thèse. Aux deux premiers modèles sont associées des solutions analytiques, tandis que seule une solution semi-analytique a pu être déterminée pour le troisième. Enfin, ces modèles sont tous trois des modèles d'équilibre partiel : les variables d'état sont exogènes.

Une démarche identique préside à l'élaboration de ces modèles : la première étape consiste à définir les variables d'état et la dynamique qui leur est associée. Ensuite, sachant que le prix d'un contrat à terme est une fonction de ces variables d'état, du temps, et de l'échéance du contrat considéré, l'application du lemme d'Itô permet d'obtenir le comportement dynamique du prix à terme. A ce stade, un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture permettent d'obtenir la prime de terme associée à chaque modèle, pour aboutir à l'équation fondamentale de valorisation caractérisant chacun des modèles et, lorsque c'est possible, à la solution de cette équation.

L'obtention de l'équation fondamentale de valorisation des prix à terme propre à chacun de ces modèles ainsi que sa résolution reposent sur des hypothèses fortes. En particulier, le raisonnement d'arbitrage permettant de déterminer l'équation fondamentale de valorisation suppose que l'on se trouve en situation de marchés complets, ce qui n'est pourtant pas le cas. La méthode de valorisation des prix à terme employée n'est donc pas idéale : en particulier, rien ne permet d'affirmer qu'un prix à terme théorique ainsi obtenu est unique. Elle constitue cependant un moyen simple d'obtenir une solution analytique pour les modèles de structure par terme des prix, qui facilite grandement leur utilisation.

Des simulations sont enfin réalisées pour observer de quelle façon les prix à termes théoriques de chaque modèle évoluent lorsque les paramètres du modèle ou le niveau des variables d'état varient. Elles permettent de se forger une opinion sur le caractère plus ou moins réaliste des structures par terme obtenues à partir de chaque

modèle. Ces simulations permettent d'aboutir à deux conclusions : elles révèlent en premier lieu le fait que le modèle de Brennan et Schwartz est peu adapté à la représentation de la structure par terme des prix d'une commodité industrielle stockable lorsque les échéances considérées sont éloignées. Elle laisse enfin percevoir que ces modèles présenteront sans doute des difficultés non négligeables en terme d'applications empiriques : en effet, le modèle de Schwartz et le modèle asymétrique comportent respectivement sept et huit paramètres. De plus, les deux variables d'état de ces modèles, qui sont le prix au comptant et le *convenience yield*, ne sont pas observables.

Les modèles de structure par terme des prix des commodités étudiés au chapitre quatre sont employés, en troisième partie de cette thèse, pour réaliser des études empiriques sur le marché du pétrole brut. Dans le chapitre cinq, l'hypothèse d'asymétrie du *convenience yield* est testée en comparant les performances respectives du modèle de Schwartz et du modèle asymétrique. Le chapitre six est consacré à l'utilisation des modèles de structure par terme des prix des commodités dans le cadre d'analyse de projets d'investissement.

Le chapitre cinq est consacré à l'étude des performances du modèle de Schwartz et du modèle asymétrique, testées sur le marché du pétrole brut, à partir de données du NYMEX pour le contrat WTI<sup>6</sup>. Ces performances sont appréciées en fonction de la capacité d'un modèle à représenter fidèlement la structure par terme des prix observée, et à prévoir les prix futurs. Le premier modèle considéré repose sur l'hypothèse selon laquelle le prix au comptant et le *convenience yield* ont un comportement de retour vers une valeur moyenne. Le second introduit une asymétrie dans le comportement du *convenience yield*.

Pour estimer les paramètres du modèle de Schwartz, compte tenu du caractère inobservable des variables d'état, la méthode retenue est celle utilisée par l'auteur : le filtre de Kalman simple. Les raisons justifiant le choix de cette méthode sont au nombre de deux : pour comparer les résultats obtenus sur le marché du pétrole brut par Schwartz et ceux issus de l'application du modèle asymétrique, il était préférable

---

<sup>6</sup> West Texas Intermediate.

de conserver, dans la mesure où celle-ci pouvait être considérée comme satisfaisante, une méthodologie identique. Rares sont les études réalisées à partir de modèles de structure par terme des prix ayant conduit à l'estimation des paramètres de ces modèles. Le problème des variables d'état inobservables aurait également pu être étudié en employant une méthode d'inversion. Cependant, l'emploi de ce type de méthodes aurait justifié en soi la réalisation d'une thèse et sortait donc du cadre de ces travaux.

Compte tenu du caractère non linéaire de la dynamique des variables d'état du modèle asymétrique, le filtre de Kalman simple ne peut lui être appliqué. Pour tenir compte de cette spécificité tout en conservant une méthode comparable à celle utilisée par Schwartz, une version étendue du filtre de Kalman est employée. Ce dernier introduit une approximation lors de la reconstitution des séries temporelles de données non observables du modèle : la relation associant les prix à terme et les variables d'état est en effet linéarisée. De plus, l'estimation des prix à terme théoriques issus du modèle asymétrique suppose la réalisation de simulations, car, contrairement à celle de Schwartz, la solution du modèle asymétrique n'est que semi-analytique. Deux approximations sont donc réalisées pour apprécier les performances du modèle asymétrique. Celles-ci agissent en la défaveur du modèle.

Etant donné le caractère provisoire des résultats obtenus à partir du modèle asymétrique, seuls le modèle de Schwartz et celui développé par Brennan et Schwartz en 1985, présentés au chapitre quatre, sont retenus pour la seconde partie des études empiriques, consacrées à l'étude de projets d'investissement.

Dans le chapitre six, le projet considéré est l'exploitation d'un gisement, dont les réserves et les coûts d'extraction sont supposés connus. Les deux modèles de structure par terme des prix des commodités sont employés à la valorisation des flux nets de trésorerie associés au projet. Ils permettent également de prendre en considération l'option associée à la détention d'un gisement. Cette option réside dans la possibilité de retarder la mise en exploitation du gisement, dans l'attente d'une hausse des prix. C'est une option réelle, car sa valeur dépend de celle d'un actif productif. Elle peut de plus être exercée à tout moment précédant l'expiration des droits d'exploitation de l'opérateur.

L'utilisation d'une approche optionnelle des décisions d'investissement apparaît comme particulièrement intéressante dans une industrie où les investissements considérés sont irréversibles<sup>7</sup> et où il arrive, de plus en plus fréquemment, que la décision d'investissement soit reportée.

Une méthode de résolution numérique est employée pour résoudre l'équation fondamentale de valorisation de l'option réelle associée au modèle de Schwartz. L'équation aux dérivées partielles est dans un premier temps discrétisée en employant un schéma de type Crank Nicholson, choisi pour la stabilité de ses solutions. Une méthode aux directions alternées est ensuite appliquée à l'équation discrétisée. Cette méthode autorise la résolution d'une équation aux dérivées partielles en deux phases, malgré la présence d'une dérivée croisée.

Deux méthodes d'analyse des projets d'investissement sont comparées : la première utilise le critère de la valeur actuelle nette pour décider de l'adoption ou du rejet du projet, la seconde se réfère aux modèles de structure par terme des prix de commodités pour valoriser les flux nets de trésorerie associés à un gisement et pour déterminer dans quelles circonstances l'investissement doit être entrepris. Les deux méthodes employées diffèrent à trois égards : la valorisation du prix au comptant futur, le taux d'actualisation retenu pour déterminer la valeur présente d'un baril de pétrole vendu dans plusieurs années, et la loi d'investissement. Pour chacune de ces méthodes, le prix au comptant pour lequel la valeur actuelle nette s'annule est calculé. De plus, pour les méthodes optionnelles, la valeur de l'option réelle et le prix critique auquel l'investissement doit être entrepris sont déterminés.

Cette comparaison permet de souligner l'importance que revêt, lorsqu'une approche optionnelle est utilisée, la prise en considération d'un comportement de retour vers une valeur moyenne pour le prix au comptant et pour le *convenience yield*.

Ainsi, en réponse à la question posée au début de cette thèse, il est possible d'affirmer que les marchés à terme et les techniques employées par les opérateurs de ces marchés peuvent être utilisés par un producteur de pétrole dans le cadre de

---

<sup>7</sup> Une fois l'exploitation d'un gisement entreprise, celle-ci est menée jusqu'à son terme.

stratégies à long terme. De la capacité des modèles de structure par terme des prix à représenter correctement les prix observés dépend naturellement la pertinence de ces décisions.

L'apport principal de cette thèse est de proposer, à partir d'une analyse exhaustive des théories explicatives de la formation du prix à terme, un modèle de représentation de la structure par terme des prix des commodités fondé sur une hypothèse de comportement asymétrique du *convenience yield*. Cette dernière a été élaborée à partir de l'analyse des comportements d'arbitrage des opérateurs entre marché physique et marché papier. Bien que les travaux permettant d'apprécier les performances du modèle asymétrique doivent être poursuivis, les résultats obtenus à ce jour permettent de penser que cette hypothèse est validée.

Pour élaborer ce modèle, les théories traditionnelles des prix des commodités ont été parcourues en profondeur, et cette thèse a ainsi permis d'offrir une vision exhaustive de l'état des théories concernant la formation des prix dans un marché à terme de commodités, en montrant quelle a été leur évolution. En commentant les tests empiriques dont elles ont été l'objet, elle a permis de se forger une opinion sur la qualité de ces études. Cette première partie du travail a enfin conduit à proposer une définition précise de la notion de *convenience yield*.

La revue de la littérature portant sur les modèles de structure par terme des commodités a mis en évidence le lien existant entre ces modèles et les théories traditionnelles, tout en soulignant de quelle façon ces modèles ont autorisé une progression dans la compréhension du mécanisme de formation des prix. Les simulations réalisées à partir de trois modèles de structure par terme des prix de commodités ont permis d'apprécier la capacité de ces derniers à représenter de façon satisfaisante le comportement des prix à terme pour une échéance éloignée. Enfin, les limites de l'approche traditionnelle des projets d'investissement ont été mises en exergue à travers une comparaison avec les méthodes optionnelles.

Sur le plan empirique, l'application de ces modèles au marché du pétrole brut a permis de mettre en évidence les difficultés que soulève la présence de variables d'état non observables. Elle a conduit à élaborer un filtre de Kalman étendu, dont les



performances ont été comparées à celles du filtre de Kalman simple. Ces études ont permis de souligner les limites et les inconvénients de cette méthode économétrique, de plus en plus fréquemment utilisée dans le domaine financier, et de suggérer des voies de recherches permettant de les surmonter.

*PREMIÈRE PARTIE :*

*LES THÉORIES TRADITIONNELLES DES*

*PRIX*

*DES COMMODITÉS*

## INTRODUCTION

Un prix à terme est un prix établi aujourd'hui pour une échéance de livraison future déterminée. Ce prix à terme peut être supérieur au prix au comptant, prix à payer pour disposer de la marchandise immédiatement, ou inférieur. Le premier cas correspond à une situation de report (*contango*), le second à une situation de déport (*backwardation*). L'objectif de cette première partie est d'expliquer ce phénomène à travers l'étude des relations unissant le marché des transactions de biens physiques et le marché des transactions de contrats à terme ; l'analyse de la base, définie comme la différence entre prix au comptant rapproché et prix à terme, constitue en effet un support théorique pour l'élaboration de modèles de structure par terme des prix des commodités.

Deux explications complémentaires de la relation entre prix au comptant et prix à terme sont proposées : la théorie du déport normal (premier chapitre) explique cette relation à partir de l'équilibre des positions de couverture des opérateurs sur le marché à terme. La théorie du stockage (second chapitre) analyse la différence entre prix à terme et prix au comptant à partir de l'étude des motifs de détention des stocks des opérateurs. Ces deux théories, formulées pour l'essentiel entre 1930 et 1958, suscitent encore de nombreuses recherches.

Les travaux empiriques visant à valider la théorie du déport normal, sur le marché pétrolier en particulier, aboutissent à des résultats contradictoires. Ce marché présente pourtant deux caractéristiques susceptibles de motiver le recours à cette théorie pour expliquer la relation entre prix au comptant et prix à terme : le sens de la base constatée et la structure de la demande de couverture sur les marchés à terme de produits pétroliers. La diversité de ces résultats est expliquée par les difficultés que

présente la validation empirique de la théorie du déport normal et par la faiblesse même de cette dernière sur certains points.

Les travaux se rapportant à la théorie du stockage ont pour objectif de vérifier que le sens et le niveau de la base peuvent être expliqués par l'analyse des coûts de stockage des commodités et les motifs de détention des stocks des opérateurs. Le second chapitre permet de montrer que pour un grand nombre de marchés de commodités, et pour diverses périodes d'études, les tests empiriques conduisent à valider la théorie du stockage. En revanche, la définition de la notion de *convenience yield*, au centre de la théorie du stockage, présente des difficultés.

# **CHAPITRE 1 : LA THEORIE DU DEPORT NORMAL**

Ce chapitre a pour objet de présenter la théorie du déport normal, les développements et controverses qu'elle a connus, ainsi que les études empiriques dont elle a été l'objet. Cette théorie, développée par Keynes en 1930, propose une explication de la formation des prix à terme fondée sur l'étude de l'équilibre des positions de couverture des opérateurs sur le marché à terme. Elle est très fréquemment invoquée pour expliquer la relation entre prix au comptant et prix à terme dans le marché pétrolier.

La thèse principale de la théorie du déport normal, exposée en première section de ce chapitre, peut être résumée de la façon suivante : dans des conditions de fonctionnement normales du marché, le prix à terme<sup>1</sup> est inférieur au prix au comptant. Comme le montre la seconde section de ce chapitre, l'application de la théorie des marchés financiers aux marchés de commodités permet, par rapport à cette formulation initiale, de préciser l'analyse du comportement des acteurs sur le marché à terme ainsi que la relation entre prix au comptant et prix à terme.

Qu'ils se situent ou non dans le cadre de la théorie des marchés financiers, les tests empiriques réalisés dans le but de valider la théorie du déport normal aboutissent à des conclusions divergentes (section trois). Une explication de cette diversité est proposée sous forme de conclusion, en section quatre.

---

<sup>1</sup> Dans la première partie de cette thèse, pour des raisons qui seront précisées ultérieurement, aucune distinction n'est faite entre prix forward et prix à terme, bien que ces deux types de prix ne se rapportent pas au même type de transaction. Pour plus de détails concernant la distinction entre transaction forward et transaction à terme, consulter par exemple Simon Y., 1995.

## SECTION 1. LA THEORIE DU DEPORT NORMAL

La théorie du déport normal, établie par Keynes et Hicks, est centrée sur l'analyse de la relation entre prix à terme et prix au comptant anticipé (1.1). Le cadre d'analyse extrêmement rigide dans lequel se situe cette théorie a suscité de nombreuses critiques, portant en particulier sur l'analyse des anticipations des acteurs proposée par Keynes, sur son interprétation de la prime de risque et sur l'importance accordée par l'auteur à la fonction de transfert de risque des marchés à terme (1.2).

### 1.1. EXPOSE DE LA THEORIE DU DEPORT NORMAL

La théorie du déport normal est établie à partir du constat suivant : sur un marché à terme, les positions de couverture des différents opérateurs ne se compensent pas nécessairement. Les besoins de couverture longue - protection contre le risque de hausse des prix par un achat de contrats à terme - classiquement exprimés par les transformateurs de matières premières, ne sont pas forcément identiques aux besoins de couverture courte - protection contre le risque de baisse des prix par une vente de contrats à terme - des producteurs et des détenteurs de stocks. Le recours aux spéculateurs est donc nécessaire pour assurer l'équilibre du marché à terme. Pour que ces derniers interviennent, il faut que le prix à terme pour une échéance T présente un écart avec le prix au comptant anticipé pour cette même échéance. Cet écart incite les spéculateurs à prendre une position compensant le déséquilibre des positions de couverture, et rémunère leur activité de prise de risque.

La théorie du déport normal établit donc une relation entre prix au comptant anticipé et prix à terme<sup>2</sup> qui s'écrit de la façon suivante :

$$F(t,T) = E_t[S(T)] - \Pi$$

Avec :           -  $F(t, T)$  : prix en t du contrat à terme parvenant à échéance en T,  
                  -  $E_t[S(T)]$  : prix au comptant anticipé en t pour la date T,

---

<sup>2</sup> La différence entre prix à terme et prix au comptant anticipé constitue la base anticipée.

-  $\Pi$  : prime marginale de risque.

La théorie du déport normal repose sur deux hypothèses centrales : en premier lieu, le prix au comptant anticipé n'est pas identique au prix à terme. Plus précisément, le prix au comptant anticipé comprend une prime permettant de rémunérer le risque de variation de prix, que le prix à terme exclut :

*« ...dans des conditions normales, le prix au comptant est supérieur au prix forward i.e. il y a déport. En d'autres termes, le prix d'offre normal sur le marché au comptant inclut une rémunération pour le risque de fluctuation de prix pendant la période de production, tandis que le prix forward l'exclut. »<sup>3</sup>*

Cette prime rémunère le service rendu par les spéculateurs. Selon Keynes, elle est en moyenne de 10% pour les commodités agricoles récoltées annuellement.

En second lieu, Keynes, puis Hicks (1946) supposent tous deux que la prime de risque est positive, et que le prix à terme est inférieur au prix au comptant anticipé. Le sens de la prime dépend de la position de couverture nette des opérateurs industriels ; pour les deux auteurs, cette position est un excédent de couverture courte. La différence entre prix à terme et prix au comptant anticipé correspond selon Keynes à ce que le producteur est prêt à sacrifier pour éviter de supporter le risque de prix. Hicks invoque un autre facteur explicatif : selon lui, les transformateurs sont moins sensibles au risque de prix que les producteurs. L'utilité des achats à terme étant plus réduite que celle des ventes à terme, il apparaît un excédent de couverture courte sur le marché. Pour compenser ce déséquilibre, il faut que les spéculateurs prennent une position longue.

L'existence de cet excédent de couverture courte sur le marché à terme permet d'expliquer les relations entre prix au comptant courant et prix à terme observées empiriquement<sup>4</sup>. Lorsque sur le marché physique les opérateurs anticipent une stabilité des prix au comptant, c'est-à-dire lorsque le prix au comptant courant

---

<sup>3</sup> Keynes J.M., 1930 : « ...in normal conditions the spot price exceeds the forward price i.e. there is backwardation. In other words, the normal supply price on the spot includes remuneration for the risk of price fluctuation during the period of production, whilst the forward price excludes this. »

<sup>4</sup> La différence entre prix à terme et prix au comptant courant constitue la base constatée.

est égal au prix au comptant anticipé, la différence entre prix à terme et prix au comptant courant est négative<sup>5</sup> : le marché est en situation de déport normal. En revanche, lorsque de façon ponctuelle les stocks sont excédentaires, le prix au comptant courant n'est plus nécessairement identique au prix au comptant anticipé : l'offre excessive de marchandises a un impact baissier sur le prix au comptant courant ; les opérateurs anticipent la résorption de ce surplus, de telle sorte que le prix au comptant anticipé est supérieur au prix au comptant courant. Dans cette situation, le prix à terme est supérieur au prix au comptant courant d'un montant correspondant au coût de stockage de la marchandise, tout en restant inférieur au prix au comptant anticipé. Il y a simultanément report sur la base constatée et déport sur la base anticipée.

La prime de risque payée aux spéculateurs par les opérateurs du marché physique est, dans la théorie du déport normal, le concept permettant d'expliquer la relation entre prix au comptant et prix à terme. Pour cette théorie, la fonction des marchés à terme est d'assurer le transfert du risque de prix entre les différents intervenants de ces marchés.

## 1.2. CRITIQUES DE LA THEORIE DU DEPORT NORMAL

Les critiques de la théorie du déport normal portent en premier lieu sur la façon dont Keynes utilise et définit les anticipations des opérateurs dans son explication de la relation entre prix au comptant et prix à terme (1.2.1). Le sens, la stabilité et l'existence même de la prime de risque sont également remis en question (1.2.2). Enfin, la fonction de transfert de risque des marchés à terme est contestée (1.2.3).

---

<sup>5</sup> Simon Y., 1986 : « *Bourses de commerce et marchés à terme de marchandises* », Dalloz Gestion Finance, 3<sup>ème</sup> édition.



### 1.2.1. Analyse des anticipations et théorie du déport normal

Le rôle accordé par Keynes aux anticipations dans l'analyse de la relation entre prix au comptant anticipé et prix à terme est bien spécifique : dans la formulation initiale de la théorie du déport normal, les anticipations permettent en effet d'expliquer le comportement des spéculateurs, mais n'interviennent pas dans la compréhension du comportement des autres opérateurs (1.2.1.a). A cette vision un peu particulière a progressivement succédé une analyse plus générale, encore en vigueur aujourd'hui, du mode de prévision des agents : l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Celle-ci modifie la théorie du déport normal à plusieurs niveaux (1.2.1.b).

#### 1.2.1.a. Les anticipations dans la théorie initiale du déport normal

Dans la théorie keynésienne, les anticipations sont prises en considération pour analyser le comportement des spéculateurs mais pas pour comprendre celui des opérateurs réalisant des opérations de couverture. Pour ces derniers en effet, tout se passe comme si les anticipations n'existaient pas.

Ce phénomène peut être expliqué de la façon suivante : selon Keynes, les industriels réalisent sur le marché à terme des opérations ayant pour but d'éliminer totalement l'incertitude à laquelle ils sont confrontés quant au niveau de prix futur.

*« Si ce prix (futur) représente un profit par rapport à ses coûts de production, alors il peut aller de l'avant à toute vapeur, vendre sa production et n'encourir aucun risque. »<sup>6</sup>*

L'élimination totale du risque de prix auquel les producteurs sont exposés n'est possible que si ces derniers adoptent un comportement bien spécifique : ils réalisent des opérations de couverture pure. Le volume de contrats vendus à terme correspond exactement à leur position sur le marché physique.

S'ils ne sont plus affectés par l'incertitude concernant le niveau du prix au comptant futur, les industriels n'ont besoin de réaliser aucune prévision<sup>7</sup>. Leur

décision d'intervention sur le marché à terme est uniquement déterminée par leur position sur le marché physique.

Les spéculateurs, eux, recourent aux anticipations pour évaluer leur profit futur sur le marché à terme ; la différence entre le prix à terme et le prix au comptant qu'ils anticipent motive leur présence sur ce marché. Keynes suppose que ces spéculateurs ont des anticipations homogènes : dans son analyse, les transactions sur le marché à terme sont inexistantes au sein du groupe constitué par les spéculateurs. Cette absence de transactions entre spéculateurs signifie que ces derniers anticipent à l'identique le prix au comptant futur.

La façon dont Keynes envisage le comportement de prévision des opérateurs intervenant sur un marché à terme est donc très restrictive : elle suppose en effet d'une part que les industriels n'anticipent pas, d'autre part que les spéculateurs se comportent de façon parfaitement homogène en terme de prévision des prix futurs. Le recours à l'hypothèse d'anticipations rationnelles permet de se dégager de ce cadre rigide.

### **1.2.1.b. L'hypothèse d'anticipations rationnelles**

A partir des années 1960, les anticipations rationnelles s'imposent progressivement comme le mode dominant d'analyse des prévisions des opérateurs<sup>8</sup>. Cette théorie suppose que les anticipations des individus doivent en moyenne être correctes, faute de quoi ils modifient leur façon de prévoir le futur. Dans ce contexte, les seules erreurs possibles sont aléatoires.

---

<sup>6</sup> Keynes J.M., 1930 : « *If this (future) price shows a profit on his costs of production, then he can go full steam ahead, selling his product and running no risk.* »

<sup>7</sup> Cette affirmation doit être nuancée : si dans la théorie keynésienne les anticipations n'interviennent pas dans la décision d'intervention des opérateurs industriels sur le marché à terme, elles sont cependant réintroduites dès que ces mêmes opérateurs se trouvent à nouveau en situation d'incertitude, par exemple lorsque la production future est planifiée.

<sup>8</sup> Les modèles d'équilibre des marchés financiers, présentés en seconde section de ce chapitre, ont cependant encore recours à l'hypothèse d'anticipations homogènes.

La notion d'anticipations rationnelles a été introduite par Muth en 1961<sup>9</sup>. Celui-ci a étendu le principe fondamental du comportement micro-économique - l'utilisation optimale des ressources disponibles - à la formation des anticipations. Dans ce contexte, l'information est une ressource rare : elle n'est pas gaspillée par les individus. Ainsi, pour se forger une opinion sur le futur, les agents se basent sur la totalité des variables dont la théorie économique dit qu'elles ont une influence sur la variable anticipée, et sur toutes les interactions connues entre ces variables. L'hypothèse sous-jacente est que les agents détiennent soit un modèle représentant le fonctionnement de l'économie, soit les résultats de ce modèle, ce qui, lorsque l'information est diffusée largement et rapidement, peut sembler vraisemblable. Sans pour autant supposer que les anticipations individuelles sont parfaites ou homogènes, en agrégeant les comportements individuels, on obtiendrait donc un résultat identique à celui que prévoit la théorie.

Dans ce cadre des anticipations rationnelles, le prix n'est plus considéré comme le seul résultat de la confrontation de l'offre et de la demande sur un marché. Dans un environnement incertain, l'acteur économique, s'il est rationnel, doit utiliser l'information que constitue le prix pour réduire son incertitude. Le prix acquiert ainsi une double dimension : en tant que résultat de décisions, il a un rôle d'agrégation de l'information ; en tant que signal pour l'action, il est un vecteur de transmission de l'information.

Enfin, lorsque le prix n'est plus seulement considéré comme le résultat des actions individuelles mais en est également le déterminant, la définition de l'équilibre compétitif est transformée : elle doit intégrer le fait que les agents utilisent le prix pour se forger une opinion sur les conditions futures du marché, et par là exercent une influence sur le prix. L'équilibre à anticipations rationnelles correspond à une situation dans laquelle l'offre et la demande se compensent totalement et où le prix traduit les anticipations des agents, de telle sorte qu'ils n'aient pas le désir, à partir de l'observation des prix, de réviser leur position.

---

<sup>9</sup> Muth J. 1961 : « Rational Expectations and the Theory of Prices Movements », *Econometrica*, vol. 69.

L'utilisation de l'hypothèse d'anticipations rationnelles modifie la théorie du déport normal à deux niveaux : en premier lieu, elle implique que les anticipations des spéculateurs ne sont pas nécessairement strictement identiques les unes aux autres. Des transactions peuvent ainsi être réalisées au sein de ce groupe d'opérateurs. Par conséquent, les spéculateurs ne sont pas tous nécessairement en position longue sur le marché à terme<sup>10</sup>. De plus, le niveau de la prime de risque n'est plus nécessairement le même que dans l'analyse keynésienne, le prix au comptant anticipé n'étant plus identique pour tous les spéculateurs.

Par ailleurs, si l'hypothèse d'aversion totale au risque des industriels est levée, il est fort probable que les industriels n'adoptent plus le comportement passif que leur attribuait Keynes, c'est-à-dire ne couvrent plus nécessairement la totalité de leurs positions sur le marché physique et ne fassent plus dépendre leurs décisions d'intervention sur le marché à terme uniquement de ces positions, mais également de leurs anticipations concernant le niveau des prix futurs. Les opérations de couverture acquièrent alors une dimension spéculative absente de l'analyse keynésienne. Là encore, le montant de la position de couverture nette des industriels étant susceptible d'évoluer en fonction de leurs anticipations, le niveau comme le sens de la prime de risque ne sont plus ceux prévus par Keynes.

### *1.2.2. L'analyse de la prime de risque*

Si le mode de prévision des prix futurs par les opérateurs a un impact direct sur le niveau et le sens de la prime de risque, il n'en est cependant pas le seul déterminant. Kaldor (1940) souligne que la prime de risque dépend également du volume des engagements des opérateurs sur le marché physique et de leur aversion au risque. Ces deux éléments n'étant pas constants dans le temps, la prime de risque ne peut être stable.

Pour Telser (1958), ce n'est plus le niveau et le sens de la prime de risque qui doivent être contestés, mais son existence même. Selon cet auteur en effet, dans un

---

<sup>10</sup> Avant même que l'hypothèse d'anticipations rationnelles n'ait été développée, Kaldor (1940) avait souligné que si l'hypothèse d'homogénéité des anticipations des spéculateurs était levée, l'analyse

marché à terme caractérisé par la présence d'un grand nombre de spéculateurs et par l'absence de barrières à l'entrée, il n'y a aucune raison pour qu'une différence conséquente puisse s'instaurer entre prix à terme et prix au comptant anticipé. Dès que le prix à terme s'éloigne du prix au comptant anticipé, la demande en excès des spéculateurs devient infinie, et leurs prises de positions sur le marché à terme ramènent les prix à une valeur d'équilibre unique.

Cootner (1960) s'oppose cependant à cette thèse en soulignant que dans sa formulation de la demande de contrats à terme des spéculateurs, Telser ne prend pas en considération le temps. Selon Cootner, le prix au comptant anticipé en  $t$  pour la période  $T$  ne peut être identifié au prix à terme en  $t$  pour l'échéance  $T$ , car les spéculateurs, dans le calcul de leur profit anticipé, incluent nécessairement la rémunération de leur investissement : ils prennent donc en considération le dépôt de garantie et les appels de marge.

La critique de Cootner porte donc sur la définition du rendement associé à la détention d'un contrat à terme. Alors que Telser emploie la définition qui sera reprise dans le cadre de la théorie du portefeuille, à savoir le taux de variation des prix à terme, Cootner insiste sur la nécessité de prendre en considération le dépôt et les appels de marge dans le calcul du rendement de l'investisseur. Même si le montant du dépôt est faible, dans la mesure où il nécessite l'immobilisation sans rémunération d'une certaine somme d'argent pendant toute la durée de détention de contrats par les spéculateurs, il faut l'intégrer dans l'analyse de la demande de contrats des spéculateurs.

Dans la formulation de Cootner, pour que le spéculateur intervienne sur un marché à terme, la différence entre prix à terme et prix au comptant anticipé, qu'elle soit positive ou négative, doit être suffisante pour qu'une position sur le marché à terme offre une rémunération au moins équivalente à celle de placements alternatifs. Soient  $r$  le taux de rendement attendu par le spéculateur sur son investissement,  $F(t,T)$  le prix à terme courant, et  $E_t[S(T)]$  le prix au comptant anticipé. Le spéculateur ne vendra de contrats que si le prix à terme  $F(t,T)$  est supérieur ou égal à la quantité  $(E_t[S(T)] \times (1+r)^n)$ , et n'en achètera que si le prix à terme  $F(t,T)$  est inférieur ou égal

---

de la prime de risque dans la théorie du déport normal serait modifiée.

à la quantité  $(E_t[S(T)] \times (1+r)^{-n})$ . Pour des valeurs de  $F(t,T)$  comprises entre ces deux limites, il ne prendra aucune position.

La demande de contrats du spéculateur n'est donc plus parfaitement élastique, comme le supposait Telser, les préférences temporelles agissant comme des coûts de transaction. Une différence peut alors exister entre prix au comptant anticipé et prix à terme.

### *1.2.3. La fonction de transfert de risque des marchés à terme*

Dans le cadre de la théorie du déport normal, fondée sur l'idée selon laquelle certains opérateurs sont moins averses au risque que d'autres, la fonction des marchés à terme est d'assurer le transfert du risque de prix entre ces différents acteurs. Les spéculateurs, dans ce cadre théorique, sont perçus comme des assureurs. Certains auteurs ont contesté cette vision.

Hardy (1940) considère plutôt les spéculateurs comme des joueurs, pour lesquels les marchés à terme sont un casino. On conçoit alors aisément qu'il ne soit plus nécessaire, dans ce contexte, de payer à ces opérateurs une prime de risque. Puisque l'intervention sur les marchés à terme leur permet de jouer sous une forme socialement acceptable, on pourrait même imaginer qu'ils acceptent de payer pour cela et qu'un report normal s'établisse entre prix au comptant anticipé et prix à terme.

Williams (1986) remet lui aussi en cause la fonction de transfert de risque des marchés à terme comme élément explicatif central de la relation entre prix à terme et prix au comptant anticipé. Pour cet auteur, une analyse de la relation entre prix au comptant et prix à terme centrée sur la notion de transfert de risque est incapable d'expliquer le comportement réel des prix dans un marché de commodité, en particulier la volatilité de la base constatée et les déformations de la structure par terme des prix.

La base constatée peut en effet être très variable à très court terme. Ces fluctuations pourraient être interprétées comme le symptôme d'une prime de risque particulièrement instable. Pour Williams, il est cependant improbable que les

fluctuations observées puissent être expliquées par des phénomènes comportementaux tels que la demande de couverture des opérateurs du marché physique ou l'offre de prise de risque des spéculateurs. Mieux vaut plutôt invoquer des variations inattendues de la production, ou d'autres incertitudes liées à l'offre, ainsi que la relative inélasticité de la demande de commodité.

### 1.3. CONCLUSION

Si, comme l'a proposé Keynes, la relation entre prix au comptant observé et prix à terme peut être expliquée par la présence, sur le marché à terme, d'opérateurs dont l'aversion au risque est différente et qui s'échangent, à travers des contrats à terme, un risque de prix, les différentes critiques développées à l'encontre de la théorie du déport normal permettent cependant de montrer que le sens et le niveau de la prime de risque peuvent varier dans le temps. Les termes « déport » et « normal », considérés individuellement ou conjointement, semblent donc inappropriés pour caractériser la relation entre prix au comptant et prix à terme.

En effet, en admettant que le déséquilibre des positions de couverture sur un marché à terme et les différences d'aversion au risque des opérateurs puissent être invoqués comme facteurs explicatifs de la relation de prix, il est fort probable que ce déséquilibre varie en fonction du marché et de la période considérés. Cette hypothèse doit cependant être validée par des études empiriques. La seconde section de ce chapitre, consacrée à l'application de la théorie des marchés financiers dans le domaine des commodités, permet une première avancée dans cette direction.

## *SECTION 2. L'APPORT DE LA THEORIE DES MARCHES FINANCIERS*

L'apport de la théorie des marchés financiers à la théorie du déport normal est double : la théorie du portefeuille, appliquée aux marchés de commodités, permet en premier lieu d'analyser le comportement d'optimisation d'un individu intervenant

sur les marchés à terme (2.1). Avec l'utilisation du modèle du *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), cette réflexion est ensuite étendue à l'ensemble du marché. Elle conduit à une nouvelle approche de la prime de risque (2.2).

Dans chacune de ces deux sous-sections, les principes généraux des théories concernées sont brièvement présentés, afin de faciliter la compréhension de leur application au domaine des commodités.

## 2.1. ANALYSE DU COMPORTEMENT INDIVIDUEL D'OPTIMISATION

La théorie du portefeuille a été appliquée aux marchés de commodités dès le début des années 1960, en particulier par Johnson (1960) et Stein (1961). Les principes de cette théorie sont d'abord présentés (2.1.1), avant d'examiner les conséquences de son application aux marchés de commodités (2.1.2), puis de conclure (2.1.3).

### 2.1.1. Principes généraux de la théorie du portefeuille

La théorie du portefeuille, formulée par H. Markowitz au début des années 1950<sup>11</sup>, est centrée sur l'analyse du risque. Son objectif est de permettre à un investisseur averse au risque de réaliser un choix entre divers projets risqués. Sa principale conclusion est la suivante : face à un ensemble de projets risqués, tous envisageables, et caractérisés par des couples *risque-rendement*, le meilleur choix pour un individu dont le critère de décision est la maximisation de son utilité, n'est pas de tout investir dans un seul projet mais au contraire de diversifier son patrimoine en le répartissant entre plusieurs projets.

Dans son esprit, la théorie concerne toutes les situations risquées : son raisonnement peut en effet s'appliquer à toute prise de décision. Sa portée pratique réelle se limite cependant assez strictement au domaine financier, dans lequel la dépense initiale à consentir pour investir, les rendements futurs et les risques d'un

---

<sup>11</sup> Markowitz H., 1952 : « Portfolio Selection », *The Journal of Finance*, May.

Markowitz H., 1970 : « *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments* », Yale



projet peuvent être relativement simplement évalués. En considérant un titre financier comme un projet d'investissement risqué, Markowitz suggère, à partir des caractéristiques de chaque titre (risque et rendement espéré), une procédure de sélection des titres qui permet de définir le portefeuille optimal de chaque investisseur, ce portefeuille maximisant l'utilité anticipée de l'individu.

Le choix des titres composant le portefeuille optimal est fondé sur le principe de la diversification, selon lequel la combinaison de titres individuels au sein d'un portefeuille permet de diminuer le risque de l'investissement, sans que son rendement soit affecté.

La rentabilité d'un portefeuille est en effet égale à la moyenne des rentabilités de chacun des titres, pondérées par leurs valeurs respectives dans le portefeuille. En revanche, le risque d'un portefeuille, représenté par la variance de son rendement, dépend non seulement de la variance des rendements des titres considérés individuellement, mais aussi de la covariance entre ces rendements. Lorsque les rendements des titres réagissent de façon opposée à un événement donné, leur covariance est négative, et leur combinaison permet de réduire le risque du portefeuille. En réunissant des titres au sein d'un portefeuille, il est donc possible, tout en conservant le même niveau de rendement, d'obtenir un risque inférieur à celui qui aurait été supporté sur les titres individuels.

Markowitz montre qu'en effectuant toutes les combinaisons possibles de tous les titres du marché, un ensemble de portefeuilles « efficients »<sup>12</sup> est obtenu. Ceux-ci, pour un niveau de rendement anticipé, minimisent le risque de l'investissement. L'ensemble des portefeuilles efficients forme la frontière efficiente, représentée

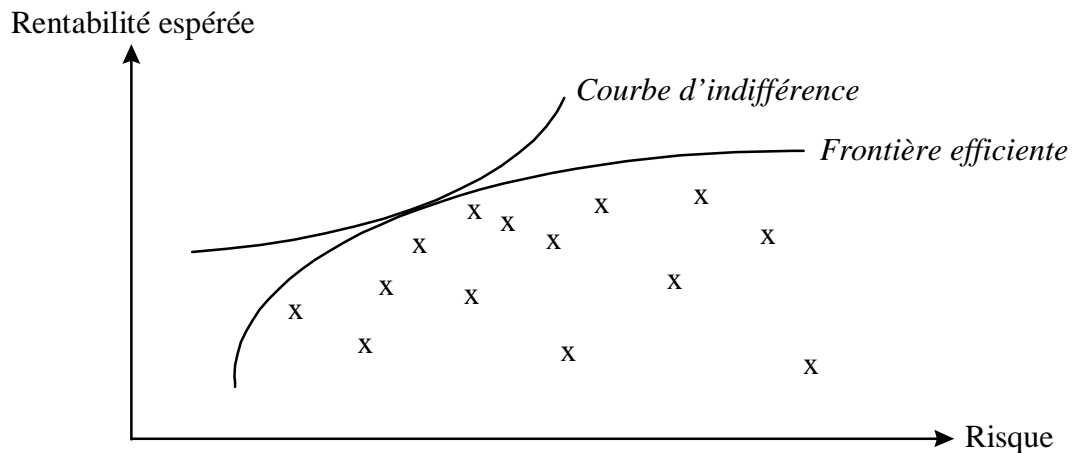
---

University Press, 2<sup>d</sup> Ed (1<sup>st</sup> Ed 1959).

<sup>12</sup>A condition que les titres soient inversement corrélés, plus leur nombre au sein du portefeuille augmente, plus la diversification est efficace. Un portefeuille composé de tous les titres du marché est mieux diversifié, toutes choses égales par ailleurs, qu'un portefeuille incluant un nombre de titres inférieur.

graphiquement ci-dessous dans un plan risque-rendement. Celle-ci forme une enveloppe autour des différents actifs risqués<sup>13</sup>.

**Figure 1.1. Frontière efficiente**



A partir des préférences individuelles des investisseurs, on peut alors déterminer, dans l'espace rentabilité-risque, le portefeuille qui maximise l'utilité anticipée de chaque individu. Le portefeuille optimal de l'investisseur se situe au point de tangence entre la courbe d'indifférence correspondant au niveau le plus élevé de satisfaction et la frontière d'efficience<sup>14</sup>.

### 2.1.2. Application aux marchés de commodités : les modèles de Johnson et Stein

Johnson (1960) et Stein (1961) importent les résultats de la théorie du portefeuille dans le domaine des commodités en assimilant un individu détenteur de

<sup>13</sup> Les croix représentent les rentabilités anticipées des titres individuels ou des portefeuilles moins diversifiés.

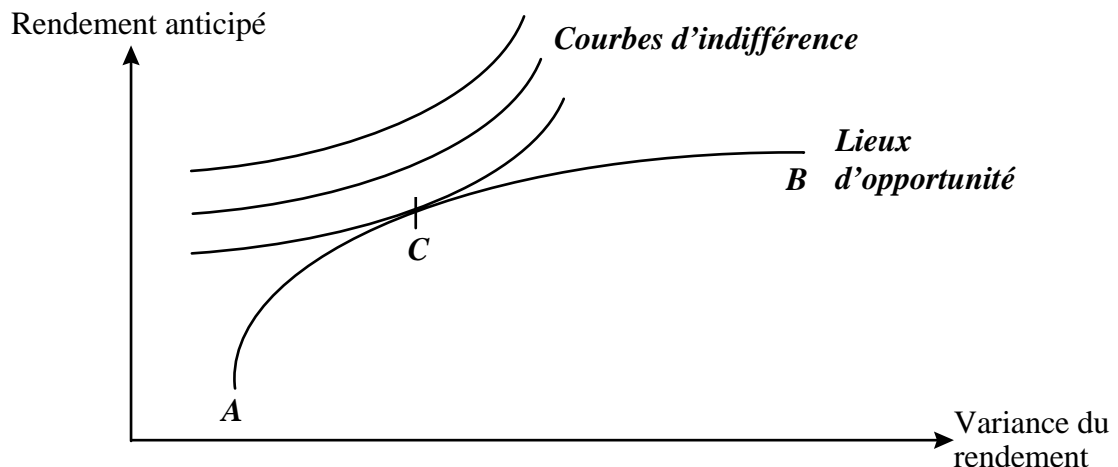
<sup>14</sup> La courbe d'indifférence d'un investisseur averse au risque est croissante dans le plan risque-rendement : pour que sa satisfaction reste inchangée, une augmentation du risque doit être compensée par une augmentation du rendement du portefeuille. De plus, les préférences de l'investisseur sont convexes : plus le rendement du portefeuille est élevé, moins il est prêt à accepter un risque supplémentaire contre une augmentation de ce rendement.

stocks de marchandises à un investisseur propriétaire de deux catégories d'actifs risqués : les stocks couverts, au rendement faible mais régulier, et les stocks non couverts, au rendement supérieur et plus risqués. Dans ce cadre d'analyse, la diversification du « portefeuille » revient à déterminer la proportion optimale de stocks à couvrir minimisant le risque de l'industriel pour un rendement anticipé donné. Pour la première fois, une analyse du comportement d'optimisation de l'individu est proposée dans le contexte des marchés de commodités.

L'utilisation de la théorie du portefeuille permet à Stein (1961) de proposer une représentation du comportement d'optimisation de l'individu dans un marché de commodités. Le portefeuille optimal de l'individu est remplacé par la proportion optimale de stock à couvrir. Stein fait l'hypothèse que l'individu connaît, pour différentes proportions de stocks non couverts, les relations entre rendement attendu et risque. Cette combinaison de relations risque-rendement, représentée ci-dessous, définit le lieu d'opportunité de l'individu, équivalent de la frontière d'efficience de la théorie du portefeuille.

Sur la figure 1.2. ci-dessous, en A, tous les stocks sont couverts : rendement et variance sont relativement faibles. A partir du point A, au fur et à mesure que l'on se déplace sur le lieu d'opportunité, le rendement et le risque associés à la détention de stocks augmentent. En B, la totalité de la position est laissée non couverte. C, point de tangence entre courbe d'indifférence et lieu d'opportunité, correspond à la proportion optimale de stocks à couvrir.

**Figure 1.2 : Proportion optimale de couverture d'un stock individuel**



Johnson aborde le même type de question que Stein, sous un angle légèrement différent : l'emploi du double critère risque-rendement lui permet de formaliser, pour la première fois, dans quelles conditions un individu réalise des opérations de couverture ou de spéculation sur un marché de commodités. A l'inverse de Keynes, qui considérait le spéculateur et l'opérateur en position de couverture comme deux individus parfaitement distincts, Johnson montre qu'il n'y a pas de distinction fondamentale entre ces deux catégories d'acteurs :

*« Il n'y a pas de différence entre l'opérateur en position de couverture et le spéculateur « ordinaire », dans la mesure où tous deux sont motivés par le souhait d'obtenir une combinaison de  $E(R)$  et de  $V(R)$  qui leur soit optimale, telle qu'elle est déterminée par leurs fonctions d'utilité respectives. »<sup>15</sup>*

Dans ce cadre d'analyse, l'unique distinction pouvant être établie entre l'opérateur réalisant des opérations de couverture et le spéculateur provient de ce que le premier est soumis à une contrainte de minimisation du risque sur le marché primaire, que le second ignore.

### 2.1.3. Conclusion

L'emprunt à la théorie du portefeuille permet d'analyser pour la première fois le comportement individuel d'optimisation dans le cadre des marchés de commodités. Avec Hicks, les décisions d'intervention sur les marchés à terme étaient conditionnées par la fonction de production des individus : le déséquilibre entre positions de couverture courte et longue sur le marché était expliqué par une moindre sensibilité du transformateur, par rapport au producteur, au risque de prix. A partir des années 1960, c'est la fonction d'utilité de l'investisseur qui est au centre de l'analyse, ce qui permet une représentation unifiée du comportement de tous les acteurs, qu'ils soient producteurs, transformateurs, négociants ou spéculateurs, et à

---

<sup>15</sup> Johnson, 1960 : « *There is no distinction between the hedger and the « ordinary » speculator insofar as both are motivated by a desire to obtain a for-them optimum combination of  $E(R)$  and  $V(R)$  as determined by their respective utility functions.* »

travers l'utilisation de modèles d'équilibre des marchés financiers tel que le CAPM, le passage de l'analyse du comportement individuel à celle de l'ensemble du marché.

## 2.2. UNE NOUVELLE APPROCHE DE LA PRIME DE RISQUE

Les modèles d'équilibre des marchés financiers - *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) et *Arbitrage Pricing Theory* (APT) - prolongent l'analyse de la théorie du portefeuille. Ils permettent d'étudier le comportement non plus d'un individu mais de l'ensemble des investisseurs et donc de passer de l'analyse des comportements d'optimisation individuels à celle de l'équilibre des marchés. L'application de cette théorie dans le cadre des marchés de commodités permet de poser différemment la question de l'existence et du sens (positif ou négatif) de la prime de risque dans un marché de commodité, et de réaliser des études empiriques pour tester la validité de la théorie du déport normal. Ces études, dont la pertinence repose sur celle des modèles d'équilibre des marchés financiers, sont qualifiées de tests empiriques indirects.

Comme dans la sous-section précédente, les principes du CAPM sont exposés (2.2.1) avant d'examiner d'une part son application au domaine des commodités (2.2.2), d'autre part la portée et les limites de cette démarche (2.2.3).

### 2.2.1. Présentation du CAPM

Dans le cadre des modèles d'équilibre des marchés financiers, le critère sur lequel se fonde la décision d'investissement reste le couple (espérance de rendement-variance). Aux hypothèses de marchés parfaits<sup>16</sup>, utilisées dans le cadre de la théorie du portefeuille, s'ajoute celle d'homogénéité des anticipations. Cette dernière simplifie le passage de l'étude du comportement individuel d'optimisation à celle de l'équilibre du marché : elle postule que tous les investisseurs ont le même horizon économique et associent à chaque titre le même couple rendement-risque.

---

<sup>16</sup> Les hypothèses de marchés parfaits sont au nombre de trois : atomicité du marché (aucun intervenant ne domine le marché et ne peut, à lui seul, agir sur le cours des titres) ; transparence du

Les anticipations des investisseurs étant homogènes, la frontière efficiente, propre à un individu dans la théorie du portefeuille, devient la même pour tous les investisseurs. De plus, alors que les travaux de Markowitz ne concernaient que les placements risqués, le modèle du CAPM intègre dans l'analyse un titre non risqué, pour lequel les opérations de prêt et d'emprunt peuvent être réalisées sans limite et à un taux identique.

La relation fondamentale du CAPM exprime le rendement d'un investissement composé d'actifs risqués (actions) et non risqués en fonction des rendements respectifs de ces deux éléments. Mathématiquement, elle s'exprime de la façon suivante :

$$E(R) - R_f = x[E(R_p) - R_f]$$

- où :
- $E(R)$  est la rentabilité anticipée de l'investissement,
  - $E(R_p)$  est la rentabilité anticipée du portefeuille d'actions,
  - $R_f$  est le taux sans risque,
  - $x$  est la proportion de l'investissement en actions.

Le portefeuille d'actions constituant le seul actif risqué, le risque associé au portefeuille de l'investisseur, mesuré par la variance de sa rentabilité, est directement proportionnel à celui du portefeuille d'actions :

$$\sigma^2 = (x\sigma_p)^2$$

- Avec :
- $\sigma$  : risque total de l'investissement,
  - $\sigma_p$  : risque du portefeuille d'actions.

Cette observation permet d'écrire autrement la relation fondamentale du CAPM :

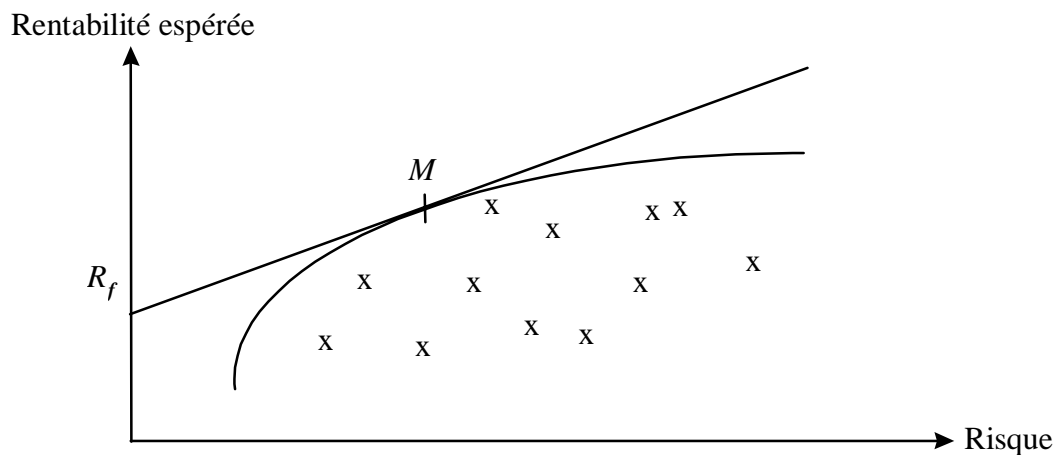
$$E(R) = R_f + \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p} \sigma$$

---

marché (l'information est accessible totalement et immédiatement) ; fluidité du marché (absence d'impôts, de taxes, de coûts de transaction et parfaite divisibilité des titres).

Tout portefeuille combinant un placement dans l'actif sans risque et un portefeuille d'actions peut être représenté par cette relation linéaire dans un espace rentabilité-risque :

**Figure 1.3 : Frontière efficiente et portefeuille de marché**



Le taux d'intérêt non risqué  $R_f$  est situé sur l'axe des ordonnées. Toute demi-droite joignant ce taux à un point placé sur ou au-dessous de la frontière d'efficience<sup>17</sup> constitue un ensemble de possibilités d'investissement, combinant un élément risqué et un élément non risqué. Le point de tangence entre cette demi-droite et la frontière d'efficience correspond à un portefeuille dont le rendement est supérieur aux autres portefeuilles de même risque. Soit  $M$  ce point de tangence. Il correspond au choix optimal de placement pour un taux sans risque donné. Tout point de cette demi-droite constitue un placement plus avantageux que les autres portefeuilles de risque équivalent.

Parmi les différentes opportunités d'investissement que représente la demi-droite, deux attitudes diamétralement opposées peuvent être adoptées : un individu extrêmement prudent allouera la grande majorité de ses ressources au placement sans

<sup>17</sup>Il est impossible de déterminer un portefeuille plus « intéressant » selon le critère risque-rendement que ceux de la frontière d'efficience. Les demi-droites ne peuvent donc pas passer au-dessus de la frontière.

risque et en consacrer une infime partie au portefeuille M ; à l'inverse, un spéculateur empruntera au taux sans risque et investira tous ses fonds disponibles dans le portefeuille M.

Lorsque l'ensemble des titres risqués est identifié à la totalité des titres disponibles sur le marché, le portefeuille risqué est le portefeuille de marché : il est formé de toutes les valeurs cotées dans les proportions des capitalisations boursières sur le marché. L'introduction du taux sans risque dans l'analyse conduit à dissocier le choix de la combinaison des titres risqués de celui du niveau de risque de l'investissement<sup>18</sup>.

L'un des apports significatifs du CAPM est de permettre une valorisation du risque. La prime de risque est représentée par la différence de rentabilité entre l'actif risqué et l'actif sans risque :  $[E(R) - R_f]$ . La rémunération du risque associé aux portefeuilles situés sur la demi-droite représentant les opportunités d'investissement correspond au rapport entre risque et rendement de ces portefeuilles ; elle est exprimée par la pente de la demi-droite :

$$\frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$$

Les résultats du CAPM ne s'appliquent pas uniquement aux portefeuilles situés sur la demi-droite  $[R_f, M]$ . Ils permettent également de mesurer le risque associé à un investissement dans une action ou dans un portefeuille non efficient. On peut effectivement formuler une relation entre la rentabilité espérée d'un titre individuel et celle du portefeuille de marché de la façon suivante :

$$E[R_i] - R_f = \beta_i [E(R_M) - R_f]$$

- Avec
- $R_i$  : rendement de l'actif i,
  - $R_M$  : rendement du portefeuille de marché,
  - $R_f$  : taux sans risque,
  - $\beta_i$  : sensibilité du titre i.

---

<sup>18</sup> Théorème de séparation de Tobin.



Le rendement en excès anticipé d'un actif donné est proportionnel à la prime de risque de marché, représentée par la différence  $[E(R_M) - R_f]$ . Ce rendement en excès dépend de la sensibilité du titre  $i$  aux fluctuations du marché, représentée par le coefficient bêta ( $\beta_i$ )<sup>19</sup>. Ce dernier s'exprime de la façon suivante :

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Avec :  
 -  $\sigma_{iM}$  : covariance entre le titre  $i$  et le portefeuille de marché,  
 -  $\sigma_M^2$  : variance du portefeuille de marché.

Le bêta représente le risque systématique associé à un titre individuel, c'est-à-dire la part du risque du titre liée aux évolutions du marché. Un bêta supérieur à un signifie que les mouvements de prix du titre amplifient ceux du marché (titre « offensif »). Lorsque le bêta est compris entre zéro et un, le titre progresse dans le même sens que le marché, mais de façon atténuée (titre « défensif »). Enfin, lorsque le bêta est négatif, l'action évolue en opposition par rapport au marché. Toute tentative de diversification menée pour réduire le risque systématique est vouée à l'échec : celui-ci persiste lorsque la combinaison du titre risqué avec d'autres a permis d'éliminer le risque spécifique de l'action, c'est-à-dire les fluctuations de cours propres au titre étudié.

La relation d'équilibre entre risque et rendement pour un titre individuel montre que seul le risque systématique associé à ce titre est rémunéré. Ce résultat est important car, comme nous le verrons en 2.2.2, il procure un moyen de tester la théorie du déport normal.

### 2.2.2. Application aux marchés de commodités

Le modèle de portefeuille est utilisé dans le cadre des marchés de commodités pour valider la théorie du déport normal à travers des tests empiriques,

---

<sup>19</sup> Les variations que connaissent le cours d'un titre peuvent avoir deux origines : soit elles sont imputables à des événements affectant l'ensemble du marché, tels que l'augmentation du produit

qualifiés de tests indirects parce que leur validité dépend de celle des modèles d'équilibre des marchés financiers. Dans ce contexte, on considère que les contrats à terme ne diffèrent pas fondamentalement d'autres actifs risqués, tels que les actions : tous sont éligibles, au même titre, au sein du portefeuille d'un acteur recherchant la diversification de son risque. De plus, un investisseur n'est rémunéré que pour le risque systématique associé à un actif risqué, et non pour son risque total.

Le « rendement » d'un contrat à terme est calculé de la même façon que celui d'un actif financier, à partir du taux de variation du prix du contrat :

$$\frac{F(T,T) - F(t,T)}{F(t,T)}$$

- Avec :
- $F(T,T)$  : prix du contrat à terme à l'échéance  $T$ ,
  - $F(t,T)$  : prix en  $t$  du contrat d'échéance  $T$ .

Le rendement en excès exigé sur cet actif risqué dépend de la sensibilité de l'actif aux fluctuations du marché, représentée par son bêta.

La théorie des marchés financiers permet ainsi d'étudier la présence et le sens d'une prime de risque dans un marché de commodités : si les spéculateurs, conformément à la théorie du déport normal, retirent une rémunération de la détention de contrats à terme, c'est qu'il existe un risque systématique associé à ces contrats. Le bêta d'un contrat à terme doit donc être positif.

Dusak (1973) est la première à employer les résultats de la théorie du marché financier pour tester la validité de la théorie du déport normal. Ses travaux ouvrent la voie à une série de tests indirects qui constituent encore aujourd'hui un sujet de recherche actif, le dernier recensé étant celui de Kolb, en 1996.

Dusak réalise un test sur les marchés du blé, du maïs et du soja, sur une période comprise entre 1952 et 1967. Elle utilise comme portefeuille de marché l'indice *Standard & Poors*, considérant celui-ci comme un portefeuille d'actions bien diversifié, représentatif de la richesse totale des investisseurs. Ses résultats sont en contradiction avec la théorie du déport normal : la prime de risque sur les marchés à

---

intérieur brut ou une crise boursière, soit elles sont associées à des événements ne concernant que le titre et son entreprise émettrice, comme la publication de résultats ou la distribution de dividendes.

terme, selon Dusak, n'existe pas. En utilisant un autre portefeuille de marché, Carter, Rausser et Schmitz (1983) aboutissent aux mêmes conclusions<sup>20</sup>. Baxter, Conine et Tamarkin (1985), à l'inverse, confirment l'existence d'une prime de risque. Dans chaque cas, les marchés explorés sont pourtant identiques : il s'agit du blé, du maïs et du soja.

Ces différences s'expliquent en grande partie par des divergences de point de vue, parmi les auteurs de ces études empiriques, concernant la définition du portefeuille de marché. Carter, Rausser et Schmitz réalisent leurs travaux dans l'esprit de ceux de Bodie et Rosansky (1980). Ces derniers avaient montré qu'un portefeuille composé à 60% d'actions et à 40% de contrats à terme de commodités obtient le même rendement qu'un portefeuille d'actions, en diminuant son risque de 30%. Le principe de diversification justifie donc l'intégration des commodités dans le portefeuille de marché. Les trois auteurs évaluent l'importance des commodités au sein de l'ensemble des actifs risqués à partir de plusieurs sources, parmi lesquelles le nombre de contrats à terme de commodités échangés sur le marché américain, la valeur des commodités représentées par les contrats échangés, et la valeur de marché des actifs fermiers aux Etats-Unis.

Marcus reprend l'analyse de Carter, Rausser et Schmitz en soulignant que leur portefeuille de marché n'est pas correctement spécifié : selon cet auteur, la contribution des commodités à la richesse doit en effet être évaluée au moyen d'un indice représentant la part des commodités dans les richesses totales. Celle-ci est estimée par Marcus à 10%. Baxter, Conine et Tamarkin recourent à ce nouvel indice pour réaliser leurs tests et concluent à l'existence d'un déport normal.

Les études réalisées à partir de la théorie des marchés financiers, prises dans leur ensemble, présentent ainsi une diversité de résultats déconcertante. Cette diversité est liée aux difficultés que pose l'application pratique de cette théorie dans le cadre des marchés de commodités.

---

<sup>20</sup>Les travaux de Carter, Rausser et Schmitz représentent un progrès à deux niveaux par rapport aux travaux de Dusak : ils intègrent le fait que le risque systématique d'une position détenue sur un marché à terme peut varier dans le temps. En particulier, dans un marché de commodités, il peut évoluer en fonction des saisons. En d'autres termes, Carter, Rausser et Schmitz prennent en considération le fait que les  $\beta$  sont instables.

### *2.2.3. Portée et limites de la théorie des marchés financiers appliquée aux marchés de commodités*

Le premier problème posé par l'utilisation de la théorie des marchés financiers est lié à la mesure du rendement d'un contrat à terme. Le rendement d'une opération sur un marché d'actions ne peut en effet être mesuré de la même façon que le rendement d'une opération sur un marché à terme. Dans le premier cas, l'agent réalise un investissement : il achète un titre, dont le prix représente une contrainte de richesse initiale. Dans le second, l'investissement se limite au versement d'un dépôt, correspondant généralement à cinq ou dix pour cent de la valeur du contrat. Le dépôt, versé aussi bien en cas de vente que d'achat de contrat, est une simple garantie de la solvabilité de l'agent : il ne peut servir à mesurer la performance de l'opération réalisée sur le marché à terme. Le fait de négliger le dépôt, seule mise de fonds initiale, dans la détermination du rendement d'une opération sur contrats à terme, semble donc justifié. En revanche, cette définition du rendement ne permet pas de prendre en considération l'effet de levier dont bénéficie un opérateur sur un marché à terme. L'effet de levier existe parce que le capital investi dans un contrat à terme est bien inférieur à la valeur du contrat à terme, ce qui entraîne un effet multiplicateur sur la rentabilité. Une grande partie de la performance associée aux opérations sur les marchés à terme est donc ignorée lorsque le rendement est mesuré par le taux de variation des prix à terme.

L'utilisation du CAPM présente une seconde difficulté, inhérente à la théorie des marchés financiers, mais accrue lors de son application aux marchés de commodités : un portefeuille de marché doit théoriquement représenter la richesse totale des investisseurs. Pour une étude consacrée aux actions, un portefeuille constitué de toutes les actions offertes par le marché dans les proportions des capitalisations boursières peut être considéré comme satisfaisant. En revanche, lorsque la notion d'actif risqué est étendue aux contrats à terme, le portefeuille de marché doit intégrer une proportion de contrats à terme représentant la contribution des marchés de commodités à la richesse totale. Or, la détermination de cette proportion est délicate.

La théorie des marchés financiers suppose en effet que les prix des actifs risqués s'équilibrent pour une quantité fixe d'actifs. Or, le nombre de contrats traités sur un marché à terme est loin d'être stable : c'est une quantité endogène, déterminée par le volume des transactions sur le marché physique et sur le marché papier, qui peut évoluer considérablement au cours d'un mois, voire même au cours d'une journée. Elle n'est de plus pas répartie uniformément sur toutes les échéances de contrats à terme : la position ouverte, sur un marché à terme, est effectivement concentrée sur le contrat dont l'échéance est la plus proche. Enfin, le contrat à terme est un actif risqué à court terme : sa durée de vie n'est pas comparable à celle d'une action. La composition d'un portefeuille de marché intégrant des contrats à terme évolue donc quotidiennement : l'établissement de la relation d'équilibre du CAPM semble donc plus difficile lorsque les contrats à termes sont intégrés dans le portefeuille de marché que lorsqu'ils ne le sont pas.

L'introduction de la théorie des marchés financiers dans le domaine des commodités, malgré les difficultés qu'elle présente, n'est cependant pas sans intérêt. Elle modifie la théorie initiale à deux niveaux : le rôle du spéculateur et la signification du risque.

Dans ce cadre théorique, le spéculateur intervenant dans un marché de commodité n'est plus nécessairement un assureur, comme c'était le cas dans la théorie initiale du déport normal : il devient un investisseur. Sachant qu'il est possible, à travers la diversification, d'éliminer une partie du risque de prix, la prime de risque, dans ce contexte, ne représente plus que le risque systématique associé aux contrats à terme de commodités. Tant qu'il n'existe pas de risque systématique associé au contrat à terme, il n'est pas nécessaire qu'une prime de risque soit payée à l'investisseur.

### ***SECTION 3. TESTS EMPIRIQUES DIRECTS DE LA THEORIE DU DEPORT NORMAL***

Des tests empiriques ayant pour objet de valider la théorie du déport normal ont également été réalisés en dehors du cadre théorique du CAPM. Ces tests se réfèrent au moins à l'une des trois implications testables de la théorie du déport normal (3.1). Working (1929-1931) montre que ces tests, pour être tout à fait rigoureux, doivent prendre en considération l'impact du niveau général des prix sur le comportement des prix à terme (3.2). A cette première condition, Cootner (1960) ajoute la nécessité d'intégrer le fait que, pour des commodités saisonnières, les positions de couverture des opérateurs industriels peuvent varier au cours de la période de récolte (3.3). Par rapport à ces différents travaux, l'étude de Fama et French (1987) présente l'avantage de l'exhaustivité : la validité de la théorie du déport normal est testée sur un très grand nombre de marchés, et sur une période étendue (3.4).

Une attention particulière est accordée, à la fin de cette section, aux études empiriques réalisées dans le cadre du marché pétrolier. Ce dernier présente en effet deux caractéristiques susceptibles de motiver le recours à la théorie du déport normal pour expliquer la relation entre prix au comptant et prix à terme : le sens de la base constatée et la structure de la demande de couverture sur les marchés à terme de produits pétroliers (3.5).

#### **3.1. IMPLICATIONS TESTABLES DE LA THEORIE DU DEPORT NORMAL**

Les implications empiriques testables de la théorie du déport normal sont au nombre de trois : la première porte sur l'évolution du prix à terme au cours de la durée de vie du contrat, la seconde sur la position des opérateurs sur le marché à terme, la troisième sur les profits des spéculateurs.

Dans le cadre de la théorie du déport normal, le prix à terme est une prédiction biaisée du prix au comptant futur : l'écart entre prix à terme et prix au

comptant correspond théoriquement à la prime de risque que les industriels sont prêts à payer pour ne plus avoir à se soucier de l'évolution des prix. Cependant, au fur et à mesure que l'échéance du contrat à terme approche, l'incertitude concernant l'évolution future du prix au comptant diminue. De ce phénomène découle la première implication testable de la théorie du déport normal : les prix à terme doivent progressivement augmenter au cours de la durée de vie du contrat, pour finalement atteindre le niveau du prix au comptant.

La seconde implication testable de la théorie du déport normal est liée à la nature des positions de couverture des opérateurs sur le marché à terme : pour que le marché soit en situation de déport normal, il faut que le déséquilibre de la position nette des industriels corresponde à un excès de couverture courte et que les spéculateurs se trouvent en position longue sur le marché à terme.

Enfin, la troisième implication testable de la théorie du déport normal est la suivante : si la prime de risque correspond effectivement à une rémunération pour le risque que les spéculateurs acceptent d'assumer à la place des industriels, les spéculateurs doivent en moyenne réaliser un gain lorsqu'ils détiennent un contrat à terme jusqu'à son échéance.

Les tests empiriques réalisés sur les marchés de commodités ne portent cependant pas nécessairement simultanément sur les trois points évoqués ci-dessus. En effet, l'information concernant l'identité des opérateurs sur le marché à terme, nécessaire pour réaliser les tests relatifs aux seconde et troisième implications testables de la théorie du déport normal, n'est pas toujours disponible. Le plus souvent, c'est donc le comportement des prix à terme au cours de la durée de vie des contrats qui est examiné.

### 3.2. LA REFUTATION DE LA THEORIE DU DEPORT NORMAL PAR WORKING

Working est le premier à mettre en lumière la contradiction entre les prédictions de la théorie du déport normal et les résultats des tests empiriques auxquels elle est confrontée. Selon cet auteur, s'il existe effectivement une prime de

risque permettant de distinguer prix à terme et prix au comptant anticipé, celle-ci est probablement très faible et non susceptible d'être vérifiée statistiquement.

L'auteur commence par remarquer, à partir d'études réalisées par la Federal Trade Commission, que le déport n'est pas une caractéristique commune à tous les marchés de commodités : de 1896 à 1922 en effet, il se manifeste pour le blé et pour le maïs, mais pas pour l'avoine. De plus, le sens de la relation entre prix au comptant et prix à terme varie en fonction des périodes considérées : de 1886 à 1896 par exemple, l'auteur observe un report pour toutes les céréales<sup>21</sup>. Ces différents constats ne permettent cependant pas, selon l'auteur, de se forger une opinion définitive quant à la validité de la théorie du déport normal.

Pour ce faire, l'auteur étudie tout d'abord la première implication testable de la théorie du déport normal, à savoir la tendance à la hausse des prix à terme au fur et à mesure qu'un contrat approche de son échéance. Selon lui, pour que les tests soient tout à fait rigoureux, il faut éliminer l'impact sur le comportement des prix à terme de l'évolution du niveau général des prix : en effet, si le niveau général des prix augmente au cours de la période considérée, le fait que les prix à terme suivent ce mouvement n'est pas nécessairement la preuve de l'existence d'un déport normal. En appliquant cette méthode au marché du blé<sup>22</sup>, l'auteur constate une tendance à la hausse des prix à terme de 2% par an. Il doute cependant que ce biais soit suffisamment important pour constituer la preuve de l'existence d'un déport normal.

Les travaux ultérieurs de Working<sup>23</sup>, portant sur les gains et pertes engendrés par les positions spéculatives sur les marchés du blé et de la farine entre 1884 et 1930, le conduisent ensuite au constat selon lequel les spéculateurs, contrairement à ce que voudrait la théorie du déport normal, ne réalisent pas, en moyenne, des gains sur le marché à terme<sup>24</sup>.

---

<sup>21</sup> « Report on the Grain Trade », VI, Federal Trade Commission, Chicago, 1924.

<sup>22</sup> « The Post-Harvest Depression of Wheat Prices », VI, *Wheat Studies*, 1929, November.

<sup>23</sup> « Financial Results of Speculative Holding of Wheat », VII, *Wheat Studies*, 1931, July.

<sup>24</sup> Ces gains et pertes sont calculés sans prendre en considération les commissions et autres coûts, de telle sorte que vraisemblablement, les gains sont surestimés, tandis que les pertes sont sous-estimées.



*« Considérés dans leur ensemble, les spéculateurs sur les marchés à terme du blé ont, dans le passé, supporté le risque de variation de prix sur le blé couvert et n'ont reçu aucune rémunération pour ce service, mais ont lourdement payé pour le privilège. »*<sup>25</sup>

Les travaux empiriques de Working remettent donc en cause la théorie keynésienne : l'étude du comportement des prix à terme ne permet pas de mettre en évidence l'existence d'une prime de risque. L'analyse des profits des spéculateurs confirme ce résultat.

### 3.3. EVOLUTION DES PRIX A TERME ET SAISONNALITE

Les travaux de Telser (1958), portant sur l'évolution des prix à terme au cours de la durée de vie d'un contrat, se situent dans le prolongement direct de ceux de Working. L'auteur étudie le signe des variations mensuelles du prix à terme sur les marchés à terme du coton et du blé entre 1926 et 1954, et teste l'hypothèse selon laquelle ces variations sont positives. Il sépare son échantillon d'analyse en trois sous-ensembles, en distinguant les périodes de hausse, de baisse, et de stabilité du niveau général des prix. Ses résultats conduisent au rejet, pour les deux marchés, de la théorie du déport normal.

Cootner (1960) remet en question la validité de ces tests empiriques. Selon ce dernier, les prix à terme n'augmentent pas nécessairement sur toute la durée du contrat. Il faut relier leurs mouvements à ceux des positions de couverture, elles-mêmes variables selon la période de l'année considérée et l'éloignement de la date de récolte. Le risque de prix est plus élevé pour les producteurs juste après la récolte, car leurs stocks atteignent à cette époque leur niveau maximal. Leur demande de couverture est alors la plus forte. A l'inverse, lorsque les stocks sont peu élevés, la couverture courte doit être faible. Dans ces conditions, le prix à terme doit augmenter régulièrement après la récolte, et diminuer à l'approche de la récolte suivante. Si les

---

<sup>25</sup> Working, 1931 : *« Speculators in wheat futures taken as a group have in the past carried the risks of price changes on hedged wheat and have received no reward for the service, but paid heavily for the privilege. »*

spéculateurs sont rationnels, ils prennent en considération ce phénomène : leur position doit être courte avant la récolte, longue ensuite.

En séparant son échantillon d'analyse en deux sous-ensembles distinguant la période précédant la récolte de celle lui succédant, Cootner réalise des tests sur les mêmes marchés que Telser et sur la même période. Il parvient à la conclusion selon laquelle les diminutions de prix à terme apparaissent en majorité avant la récolte, tandis que les hausses se manifestent dans les mois qui la suivent. Les positions des spéculateurs ne sont cependant pas tout à fait conformes à ce que l'auteur avait prévu : elles sont toujours longues, quoique la position longue s'accroisse quand les prix à terme baissent et diminue quand ils augmentent.

En introduisant dans l'analyse les fluctuations des positions de couverture, Cootner confirme non pas l'hypothèse du déport normal sur les marchés de commodités agricoles, mais la présence d'une prime de risque, dont le sens et le niveau sont variables en fonction de l'éloignement de la date de récolte.

### 3.4. ANALYSE DES RENDEMENTS DES CONTRATS A TERME

Fama et French (1987) réalisent des tests sur un échantillon d'analyse très large et une période très étendue : vingt et un marchés de commodités, de 1966 à 1984. Ils étudient en premier lieu, pour chaque marché, l'évolution des rendements mensuels des contrats à terme de commodités<sup>26</sup>. L'objectif de cette analyse n'est pas de mesurer la performance d'une opération sur les marchés à terme, mais de vérifier que les prix à terme évoluent effectivement dans le sens prévu par la théorie du déport normal : si les prix à terme augmentent au fur et à mesure que le contrat approche de son échéance, le rendement du contrat à terme doit être positif.

Ce constat ne peut cependant être établi de façon rigoureuse pour aucune des vingt et une commodités considérées.

---

<sup>26</sup> Comme dans le cadre du CAPM, le rendement associé à la détention d'un contrat à terme est identifié au taux de variation des prix à terme.

### 3.5. LES TESTS INCLUANT LE MARCHÉ PETROLIER

Les études visant à valider la théorie du déport normal sur le marché pétrolier sont nombreuses, car celui-ci présente deux caractéristiques pouvant refléter une situation de déport normal : le sens de la base constatée, et la structure de la demande de couverture sur le marché à terme (3.5.1). Les résultats des études empiriques ne conduisent cependant pas pour autant, loin s'en faut, à valider la théorie du déport normal (3.5.2).

#### *3.5.1. Les caractéristiques du marché pétrolier*

De nombreuses études ont souligné la fréquence des situations de déport sur le marché pétrolier. Pour ne citer que les principales, Litzenberg et Rabinowitz (1994) calculent qu'entre le mois de février 1984 et le mois d'avril 1992, les prix à terme pour les neuf premières échéances des contrats de pétrole brut étaient en situation de déport 77% du temps ; Culp et Miller (1995) montrent que la base mensuelle est en moyenne négative de mai 1983 à septembre 1994 sur les marchés du pétrole brut et du fioul domestique. Enfin, Edwards et Canter (1995) aboutissent à un constat similaire sur les marchés du pétrole brut, du fioul et de l'essence entre avril 1983 et décembre 1992.

Selon Keynes, lorsque le marché anticipe une stabilité des prix au comptant, il y a simultanément déport sur la base anticipée et sur la base constatée. Le maintien d'une base négative ou nulle sur les trois marchés à terme pétroliers pourrait donc être le résultat de l'existence d'une base anticipée négative.

De plus, les consommateurs finaux sont faiblement représentés sur les marchés à terme pétroliers : une étude réalisée par l'Energy Security Analysis en 1996<sup>27</sup> permet de constater que la demande de couverture courte est excédentaire sur l'ensemble des marchés pétroliers américains. Elle montre que le contrat NYMEX de pétrole brut est devenu un contrat de producteur, et d'autre part, que les contrats de

---

<sup>27</sup> E.N.Krapels, 1996 : « Paper Oil : The State of the Markets and the Uses of Their Instruments », *ESAI Study*.

produits pétroliers souffrent d'un déséquilibre lié à l'absence des consommateurs finaux<sup>28</sup>.

Le marché pétrolier présente donc deux caractéristiques susceptibles de motiver le recours à la théorie du déport normal pour expliquer la relation entre prix à terme et prix au comptant : les situations de déport sur la base constatée sont les plus fréquentes et la couverture courte domine.

### *3.5.2. Les résultats des études empiriques*

Les études réalisées sur le marché pétrolier aboutissent cependant à des résultats contradictoires : l'analyse des rendements des contrats à terme entre 1980 et 1988 permet à Kolb (1992) de conclure que les marchés du pétrole brut et du fioul domestique sont en situation de report normal. Bessembinder (1993) sur une période d'étude légèrement différente, aboutit au résultat inverse : sur le marché du pétrole brut, il obtient des rendements moyens positifs, ce qui, bien que ses résultats ne soient pas tout à fait satisfaisants sur le plan statistique, plaide en faveur de la théorie du déport normal. Deaves et Krinsky (1995) reprennent l'étude de Kolb en augmentant la période d'étude de quatre ans. Sur le marché du pétrole brut, ils obtiennent un rendement moyen des contrats à terme très proche de zéro pour toute la période étudiée : il n'y aurait donc ni report ni déport normal sur le marché pétrolier. Enfin, Kolb, en 1996, à partir d'un modèle d'équilibre de marché, montre que le risque systématique associé aux contrats à terme de pétrole brut et de fioul domestique n'est pas rémunéré : la théorie du déport normal ne serait donc pas vérifiée....

La diversité des résultats obtenus sur les marchés pétroliers semble indiquer que si la prime de risque existe, ce qui n'a pas été mis en évidence de façon satisfaisante, elle est vraisemblablement variable, comme ont permis de le souligner

---

<sup>28</sup> La structure de la demande de produits finis explique l'absence de demande de couverture de la part des consommateurs finaux : le marché dominant des produits finis, à savoir celui des carburants, est fragmenté entre tous les consommateurs individuels. Ceux-ci ne se couvrent pas contre le risque de prix pour deux raisons : ils ne disposent pas des moyens de couverture nécessaires et leur

les critiques adressées à l'encontre de la théorie du déport normal, présentées en première section de ce chapitre.

## *SECTION 4. CONCLUSION*

Les études empiriques réalisées pour valider la théorie du déport normal peuvent être classées en deux catégories : les premières, examinées en seconde section de ce chapitre, utilisent un modèle d'équilibre de marché, le CAPM, pour mettre en évidence l'existence d'un risque systématique associé aux contrats de commodités ; les secondes, présentées en troisième section, analysent l'évolution des variations des prix des contrats à terme dans le temps, le sens des positions des opérateurs sur le marché à terme, ou les gains engendrés par les spéculateurs. Les résultats de ces études, très contradictoires, ne permettent pas de rejeter totalement la théorie du déport normal, ni de se prononcer définitivement en sa faveur. Ce phénomène peut être expliqué par les difficultés de validation empirique particulières que pose la théorie du déport normal.

Les études empiriques réalisées pour valider la théorie du déport normal dans le cadre du CAPM présentent deux caractéristiques rendant délicate l'interprétation des résultats obtenus : en premier lieu, la mesure du rendement associé à la détention d'un contrat à terme n'est pas une tâche simple. Lorsque ce rendement est identifié au taux de variation des prix de ce contrat, la performance provenant de l'existence d'un effet de levier n'est pas prise en considération. Or, l'impact de ce dernier est d'autant plus important que le montant du dépôt de garantie est faible et que les prix sont volatiles. De ce fait, la mesure du risque systématique associé à un contrat à terme obtenue en définissant le rendement d'un contrat à terme comme celui d'une action ne peut être considérée comme satisfaisante.

---

consommation d'essence ou de gasoil représente une faible part de leur coût total de déplacement. Le déséquilibre de la demande de couverture est donc structurel.

Seconde limite présentée par l'application du modèle du CAPM aux marchés de commodités : les résultats des études empiriques dépendent non seulement de la validité de la théorie du déport normal, mais aussi de celle du modèle d'équilibre des marchés financiers.

Enfin, l'élaboration du portefeuille de marché est délicate lorsque celui-ci intègre des contrats à terme de commodités. Les résultats des tests sont très variables en fonction du portefeuille de marché retenu.

Quelle que soit la catégorie d'études empiriques considérées, la diversité des résultats obtenus peut également être expliquée par la présence d'une prime de risque variable dans le temps. En se dégageant du cadre théorique restrictif posé par Keynes, il est en effet possible d'expliquer l'existence d'une différence entre prix au comptant anticipé et prix à terme par un déséquilibre des positions de couverture des opérateurs, sans pour autant supposer que l'ampleur et le sens de ce déséquilibre (et donc la prime de risque) soient constants.

Les études empiriques réalisées dans le cadre du CAPM sont cependant difficilement adaptables à l'étude d'une prime de risque variable dans le temps. Dans ce cadre théorique, seul le risque systématique est pris en considération, et ce risque est mesuré par le bêta du contrat à terme. Or, le bêta correspond à une moyenne calculée sur la période d'observation ; il ne donne donc que de faibles indications concernant l'évolution de la prime au sein de l'intervalle temporel considéré.

Quant aux tests empiriques analysant directement les implications testables de la théorie du déport normal, ils se contentent essentiellement de calculer les profits moyens des spéculateurs et l'évolution des prix à terme au cours de la durée de vie du contrat. Leurs résultats varient en fonction de la période considérée, comme l'ont montré en particulier Deaves et Krinsky (1995) pour le marché pétrolier, ce qui permet d'envisager l'existence d'une prime de risque variable dans le temps. Là encore, l'analyse manque de précision. Elle ne permet pas en particulier de déterminer quand la prime de risque varie au sein de l'intervalle considéré.

Une interrogation plane donc encore aujourd'hui sur l'élément central de l'explication de la relation entre prix au comptant et prix à terme proposée par la théorie du déport normal : la prime de risque. De ce fait, la théorie du déport normal suscite encore un vif intérêt de la part des opérateurs des marchés comme de celle des chercheurs. La présence d'une situation de déport presque permanente sur le marché pétrolier, en particulier, associée à celle d'un excédent de couverture courte, continue à soulever de nombreuses interrogations.

## CHAPITRE 2 : LA THEORIE DU STOCKAGE

La théorie du stockage explique les situations de report et de déport se manifestant sur un marché à terme de commodité à partir d'une analyse fondée sur la prise en considération de l'existence de stocks sur le marché physique (1). L'étude des opérations d'arbitrages réalisées par les opérateurs entre marché physique et marché papier permet en premier lieu de comprendre les mécanismes sous-tendant l'apparition de situations de report et de déport. Elle conduit à mettre en évidence le fait que la base évolue de façon différente lorsqu'elle est positive ou négative (1.1).

La présence de stocks dans le marché physique permet d'expliquer simplement les situations de report : sous l'effet des opérations d'arbitrage, le prix à terme est supérieur au prix au comptant d'un montant correspondant au coût de stockage de la commodité entre la date courante et l'échéance du contrat à terme (1.2). L'explication des situations de déport, en revanche, est plus délicate. Si le prix à terme est égal au prix au comptant augmenté de coûts de stockage positifs, comment le prix à terme peut-il devenir inférieur au prix au comptant ? De plus, si le prix à terme comprend effectivement le coût de stockage de la marchandise, un opérateur détenant des stocks, s'il vend à terme sa marchandise en situation de report, n'a pas à supporter le coût de stockage. Comment alors expliquer qu'en situation de déport, des stocks soient détenus sans être couverts par une vente à terme, alors même que cette opération est coûteuse ?

Deux réponses sont apportées à ces questions. Kaldor, en 1939, introduit la notion de « rendement » attaché à la détention de stocks : le *convenience yield*<sup>1</sup> (1.3). L'intégration de ce concept dans l'analyse lui permet d'expliquer la détention de stocks en situation de déport. Pour Working (1949), le *convenience yield* n'est

---

<sup>1</sup> Compte tenu des problèmes de définition que peut éventuellement poser la notion de *convenience yield*, pour éviter toute confusion, l'expression anglaise a été conservée.



cependant pas le seul élément permettant de comprendre ce phénomène : pour expliquer la relation entre prix au comptant et prix à terme, en situation de report comme en situation de déport, l'auteur utilise la notion de « prix » du stockage (1.4).

Malgré l'apport théorique de Working, les développements ultérieurs de la théorie du stockage retiennent la notion de *convenience yield* comme élément explicatif fondamental de la relation entre prix au comptant et prix à terme. Sa définition est précisée par Brennan en 1958 (2.1) puis par Weymar en 1968 (2.2 et 2.3).

Sur le plan empirique, la validité de la théorie du stockage est confirmée sur un grand nombre de marchés de commodités (3). Les résultats des études empiriques sont cependant très sensibles aux données utilisées, à tel point que la notion de *convenience yield* et par conséquent la théorie du stockage ont récemment été remises en question (4).

## ***SECTION 1. EXPLICATION DES SITUATIONS DE REPORT ET DE DEPORT***

L'étude des relations d'arbitrage entre marché physique et marché à terme permet de comprendre qu'en situation de report, le prix à terme correspond aux coûts de stockage de la marchandise, et de mettre en évidence l'asymétrie existant entre les situations de déport et de report (1.1). L'analyse des situations de report, réalisée par Keynes en 1930, le conduit à définir les principales composantes du coût de stockage (1.2). L'introduction de la notion de *convenience yield* permet de compléter cette analyse et d'expliquer la présence de stocks en situation de déport (1.3). Working (1958) montre cependant que le *convenience yield* n'est pas le seul élément permettant d'expliquer ce phénomène (1.4).

### **1.1. LES RELATIONS D'ARBITRAGE**

L'analyse des relations d'arbitrage entre marché physique et marché papier permet de comprendre que le niveau du report, sur un marché à terme de

commodités, est limité au coût de stockage de la marchandise entre la date courante et celle d'échéance du contrat, alors que ce n'est pas le cas pour le niveau du déport.

En présence de stocks en surplus, le prix à terme ne peut être inférieur au prix au comptant courant. Si tel était le cas, il deviendrait rentable et non risqué de vendre les stocks sur le marché au comptant, et simultanément de les racheter à terme (opération de *reverse cash and carry*). La multiplication de ces opérations d'arbitrage conduirait à une baisse du prix au comptant sous l'effet des ventes massives de stocks physiques, et simultanément à une hausse du prix à terme suite aux achats de contrats. Les opérations d'arbitrage ne cesseraient que lorsque le prix à terme serait supérieur au prix au comptant, d'un montant représentant le coût de stockage. L'existence de stocks en surplus conduit ainsi à une situation de report sur la base constatée, définie comme la différence entre prix au comptant courant et prix à terme : le prix à terme doit refléter les frais supportés par les entrepreneurs pour immobiliser la marchandise au cours de la période considérée.

Le niveau du report ne peut pas se maintenir longtemps à un niveau supérieur à celui des coûts de stockage. Si une telle situation se produisait, des opérations d'arbitrage inverses à celles évoquées précédemment rétabliraient l'équilibre, car il deviendrait rentable d'acheter des stocks sur le marché au comptant, de les conserver, et, simultanément, de les vendre à terme (arbitrage *cash and carry*). La vente de contrats entraînerait une baisse des prix à terme, le prix au comptant augmenterait sous l'effet des achats de stocks physiques, et les opportunités d'arbitrage disparaîtraient<sup>2</sup>.

Les situations de déport sur la base constatée peuvent se prolonger tant que la situation de pénurie de stocks perdure. Les opérations de *reverse cash and carry*, mentionnées précédemment, réalisées lorsque les stocks sont excédentaires, deviennent improbables lorsqu'ils sont peu élevés, et ce d'autant plus que la pénurie

---

<sup>2</sup> Dans le marché pétrolier, il existe deux limites au report. La première est déterminée par les coûts de stockage à terre ; lorsque les capacités de stockage à terre sont saturées, une seconde limite au report se manifeste : celle-ci est déterminée par les coûts de stockage en mer. Les opérations d'arbitrage *cash and carry*, lorsque les capacités à terre sont saturées, sont réalisées à partir du pétrole stocké en mer.

est prononcée : les opérateurs n'ont en effet aucun intérêt à se défaire de leurs stocks tant qu'ils anticipent une hausse supplémentaire du prix au comptant.

Les situations de déport présentent donc des caractéristiques différentes de celles de report ; en premier lieu, le niveau du déport n'est pas, comme c'est le cas pour le report, limité par les opérations d'arbitrage :

*« L'arbitrage permet toujours d'éviter que le prix forward excède le prix au comptant d'un montant supérieur au coût net de portage...[mais] il ne peut être aussi efficace pour éviter que le prix forward excède le prix au comptant d'un montant inférieur au coût net de portage. »<sup>3</sup>*

Alors que la borne supérieure du report est fixée objectivement par le coût de stockage, celle du déport est déterminée uniquement par le prix maximum que les acheteurs sont prêts à payer pour obtenir la marchandise. De plus, comme cela sera expliqué en troisième section de ce chapitre, la base est plus volatile lorsqu'elle est en déport.

## 1.2. ANALYSE DU REPORT

Dès 1930, Keynes explique les situations de report sur les marchés à terme de commodités par la présence de stocks. Ceci le conduit à préciser quels sont les stocks à prendre en considération dans l'analyse et ce que représente le coût du stockage.

Les stocks invoqués par Keynes<sup>4</sup> sont des stocks en surplus (*redundant stocks*), constitués suite à une erreur d'appréciation. Ils sont nommés ainsi par opposition aux stocks opérationnels (*working capital*) regroupant les stocks en voie d'acheminement, les stocks permettant de réaliser des ajustements saisonniers, et les stocks de sécurité assurant la continuité de la production. Les stocks en surplus permettent rarement d'assurer plus de quelques mois de consommation future. Dès qu'ils apparaissent, des mécanismes visant à leur élimination sont mis en oeuvre : le

---

<sup>3</sup>G. Blau, 1944-45 : « Arbitrage can always be relied upon to prevent the forward price from exceeding the spot price by more than net carrying cost...[but] can not be equally effective in preventing the forward price from exceeding the spot price by less than net carrying cost. »

<sup>4</sup>J.M. Keynes, 1930 : « *Treatise on Money* », Macmillan, Londres, volume 2.

prix des marchandises diminue jusqu'à ce que l'augmentation de la consommation ou la diminution de la production soit suffisante pour les absorber.

Les coûts de stockage (*costs of carrying, carrying charges*) sont composés de quatre éléments : les frais de détérioration et d'obsolescence, les frais et primes d'assurances liés à l'entreposage, les frais financiers, et le risque de variation de la valeur monétaire des produits.

Les frais de détérioration et d'inadaptation varient fortement en fonction de la nature de la marchandise considérée. Ils concernent particulièrement les denrées périssables, les produits dont la consommation est soumise à des phénomènes de mode - en particulier les vêtements - et ceux dont la demande est difficile à prévoir parce qu'elle varie en fonction des évolutions technologiques. Les frais de détérioration et d'obsolescence peuvent dans certains cas représenter jusqu'à 40% du coût de stockage d'une marchandise. Ils sont généralement plus faibles dans le cas des matières premières : pour celles-ci, les frais de détérioration et d'obsolescence représentent en moyenne 15 à 20% du coût de stockage annuel<sup>5</sup>.

Les frais de stockage regroupent les primes d'assurance - incendie, responsabilité civile, vol... -, et les frais de location des entrepôts - coûts de manutention, entretien des locaux, frais d'exploitation et d'administration générale -. Dans le cas du pétrole, ces coûts sont particulièrement élevés. Ils comprennent également l'entretien des réservoirs, les frais de dépollution des eaux résiduaires, et éventuellement les frais de réchauffage des produits.

Les frais financiers sont évalués à partir du coût d'opportunité que représente la mobilisation de fonds nécessaires à la détention de la marchandise au cours de la période considérée.

Enfin, le risque de variation de la valeur monétaire des produits provient de ce qu'il est impossible de connaître avec certitude le prix de vente des marchandises entreposées ni le temps qui sera nécessaire pour écouler les stocks. Ce risque est une fonction croissante du niveau des stocks.

---

<sup>5</sup>Simon Y., 1986 : « Bourses de commerce et marchés à terme de marchandises » Dalloz, 3<sup>e</sup> Edition, p 175.

La théorie des coûts du stockage n'est pas incompatible avec celle du déport normal. Cette dernière a pour point de départ l'analyse de la relation entre prix à terme et prix au comptant anticipé (base anticipée) ; de cette relation est déduite la relation liant le prix au comptant courant au prix à terme (base constatée). Lorsque le marché anticipe la stabilité du prix au comptant, le déport sur la base anticipée se traduit par un déport sur la base constatée. En revanche, dans le cas où, suite à une erreur d'anticipation de la part des opérateurs<sup>6</sup>, des stocks en surplus apparaissent, une situation de déport sur la base anticipée peut coïncider avec une situation de report sur la base constatée.

Le fait qu'il y ait un report sur la base constatée ne signifie pas que les industriels ne payent plus de prime aux spéculateurs pour se libérer de leur risque de prix. Au contraire, le risque additionnel que la détention de ces stocks implique pour les opérateurs du marché physique conduit à un accroissement de la rémunération demandée par les spéculateurs : le déport sur la base anticipée augmente.

### 1.3. DEPORT ET *CONVENIENCE YIELD*

En situation de pénurie de stocks, la différence entre prix à terme et prix au comptant peut devenir négative : la base est alors en déport. La théorie des coûts de stockage, telle qu'elle est énoncée dans le contexte de stocks en surplus, ne permet pas d'expliquer la relation entre prix à terme et prix au comptant lorsque les stocks, au lieu d'être pléthoriques, deviennent rares. Le concept de coûts de stockage se révèle alors insuffisant ; Kaldor (1939) montre qu'il doit être remplacé par le coût de stockage *net*, représentant la différence entre coûts de stockage et « rendement » des stocks de marchandises :

*« Dans des circonstances normales, un rendement est associé à tout stock de marchandise. Ce rendement, qui est une compensation pour le détenteur de stocks, doit être déduit des coûts de portage, afin de calculer un coût net de portage. De ce fait, ce dernier peut être négatif ou positif. »<sup>7</sup>*

---

<sup>6</sup> Anticipation à la hausse du prix au comptant.

<sup>7</sup>N. Kaldor, 1939-40 : « *In normal circumstances, stocks of all goods possess a yield, measured in terms of themselves, and this yield which is a compensation to the holder of stocks, must be*

Le rendement (*yield*) associé aux stocks représente le bénéfice qu'un producteur retire de ses stocks s'il peut disposer de marchandises dès qu'il en a besoin, sans avoir à supporter le coût associé à des commandes fréquentes, ni celui lié à l'attente des livraisons. Ce bénéfice est celui de la disponibilité : il représente le « confort » retiré de la détention de stocks.

L'introduction du *convenience yield* permet de compléter l'analyse de la relation entre prix au comptant et prix à terme en expliquant l'origine des situations de déport : lorsque le marché se trouve en situation de pénurie, suite par exemple à une augmentation inattendue de la demande, le *convenience yield* peut être supérieur au coût de stockage. Le prix au comptant devient alors supérieur au prix à terme. La relation entre prix au comptant et prix à terme peut être formulée de la façon suivante :

$$F(t,T) = S(t) + C'(t,T)$$

$$C'(t,T) = C(t,T) - C_y(t)$$

Avec :

- $F(t,T)$  : prix en  $t$  du contrat à terme parvenant à échéance en  $T$ ,
- $S(t)$  : prix au comptant en  $t$ ,
- $C'(t,T)$  : coût de stockage marginal net entre  $t$  et  $T$ ,
- $C(t,T)$  : coût de stockage marginal entre  $t$  et  $T$ <sup>8</sup>,
- $C_y(t)$  : *convenience yield* marginal en  $t$ .

Selon cette relation, le niveau de la base sur un marché à terme est une fonction du niveau des stocks ; lorsque ceux-ci sont excédentaires, la base est positive, en report ; dans le cas inverse, la base est négative, en déport.

#### 1.4. LE « PRIX » DU STOCKAGE

La théorie du « prix » du stockage, formulée par Working en 1949<sup>9</sup>, se situe dans le prolongement de la théorie des coûts de stockage. Cette théorie marque un progrès par rapport aux travaux précédents en proposant une explication de la

---

*deducted from carrying costs proper in calculating net carrying cost. The latter can, therefore, be negative or positive. »*

<sup>8</sup> Le coût de stockage représente ici les coûts d'entreposage et les frais financiers.

relation entre le prix au comptant courant et l'ensemble des prix à terme cotés à un instant  $t$ . Elle conduit de plus l'auteur à réfuter la théorie des anticipations.

#### 1.4.1. Rendement du stockage et fonction d'offre de stockage

En présence de stocks abondants, c'est-à-dire en situation de report, la différence entre deux prix cotés pour des livraisons à des dates distinctes représente le coût de stockage net entre ces deux dates. L'existence d'un marché à terme, associée à la pratique d'opérations de couverture, donne la possibilité d'estimer le rendement d'une opération de stockage et procure un moyen de s'assurer le bénéfice de ce rendement<sup>10</sup>. Pour Working, un rendement connu de stockage s'identifie à un prix du stockage. Dans un marché libre, la concurrence entre les opérateurs offrant des services de stockage détermine la différence entre deux prix cotés pour des livraisons à des dates distinctes : cette différence est le prix du stockage<sup>11</sup>.

*« Un rendement du stockage connu est essentiellement un prix du stockage. Le fait que le prix du stockage n'est pas coté directement, mais doit être déduit de la différence entre deux prix cotés du blé pour différentes dates de livraison n'affecte pas le raisonnement économique. La différence de prix, au moins lorsqu'elle est positive, est elle-même, à tout point de vue, un prix de stockage déterminé dans un marché libre par la concurrence entre ceux qui offrent des services de stockage. »<sup>12</sup>*

---

<sup>9</sup> H. Working, 1949 : « The Theory of Price of Storage », *American Economic Review*, pp 1254-1262.

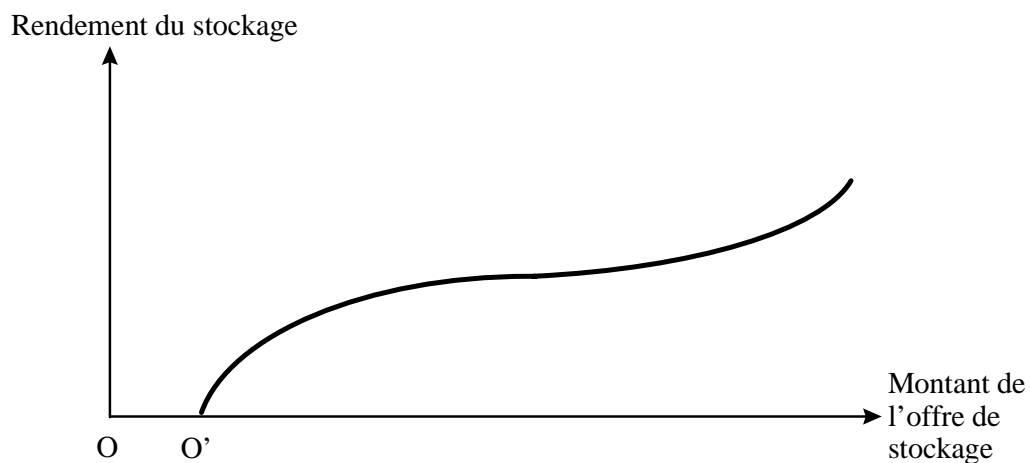
<sup>10</sup> Pour Working, la fonction de transfert de risque de prix des marchés à terme, centrale dans la théorie du déport normal, est loin d'être la plus importante. Selon cet auteur, la fonction des marchés à terme est principalement de faciliter les décisions d'achat et de vente des opérateurs, et de leur donner une plus grande liberté d'action.

<sup>11</sup> Dans la suite de ce texte, l'expression rendement du stockage sera préférée à celle de « prix du stockage ». La différence entre deux prix à terme pouvant devenir négative, il paraît en effet plus cohérent de parler de rendement du stockage négatif plutôt que de prix du stockage négatif.

<sup>12</sup> H. Working, 1939 : « A known return for storage is, in essentials, a price of storage. The fact that the price of storage is not quoted directly, but must be derived by taking the difference between quoted prices of wheat for two different dates of delivery is immaterial for the economic reasoning. The price difference, at least when it is positive, is in all essential respects itself a price of storage, determined in a free market through the competition of those who seek to supply storage services. »

Working met en évidence une relation statistique étroite entre le rendement du stockage (différentiel entre deux prix à terme) et le niveau de l'offre de capacités de stockage : lorsque les stocks à entreposer sont abondants, le rendement du stockage doit augmenter pour inciter les opérateurs à détenir des stocks. En associant le niveau de stocks qu'une firme est prête à détenir avec la variation de prix anticipée<sup>13</sup> sur l'intervalle temporel considéré, l'auteur obtient la représentation de la fonction d'offre de stockage<sup>14</sup> :

**Figure 2.1 : Fonction d'offre de stockage**



Le graphique ci-dessus est une représentation générale de la courbe d'offre de stockage. La forme de celle-ci peut légèrement varier, en fonction de la longueur de l'intervalle temporel entre deux prix à terme, en fonction de la période de l'année considérée, ou encore en fonction de l'année étudiée.

Les études empiriques permettent également de constater que lorsque la base est nulle, voire négative, l'offre de stockage reste substantielle (le point O' du graphique est à droite de l'origine O). Pour que la théorie de Working soit complète, il faut donc qu'elle explique pourquoi des stocks sont encore détenus alors même que cette opération n'apparaît plus comme rentable.

Pour l'auteur, rien n'indique que le rendement du stockage change de nature quand il devient négatif. Lorsque les stocks diminuent et que la différence entre deux

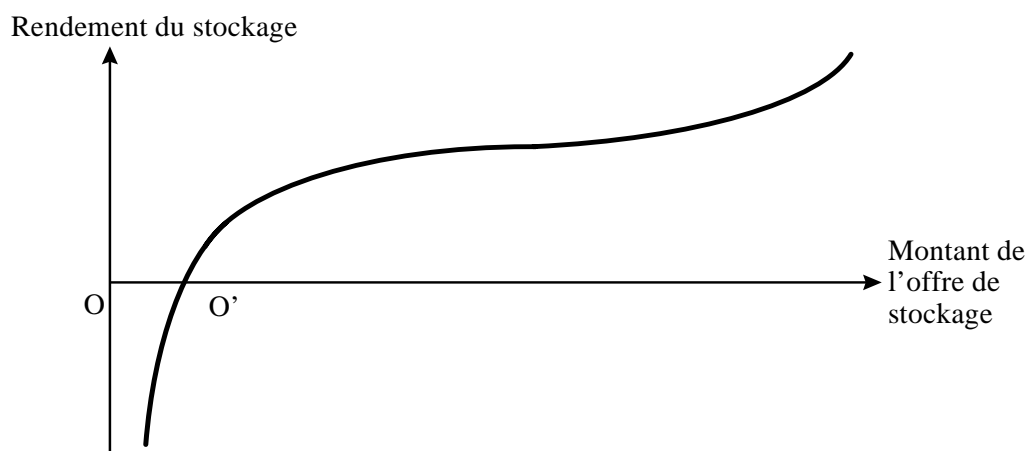
<sup>13</sup>Le prix au comptant anticipé est ici identifié au prix à terme.



prix pour deux dates de livraison distinctes devient nulle, ou négative, le rendement du stockage suit la même évolution.

La courbe d'offre de stockage complète, établie en prenant en considération l'existence de rendements du stockage négatifs, est obtenue à partir d'observations statistiques complémentaires. La représentation graphique de la courbe d'offre est modifiée par rapport à la précédente : elle est « agrandie » vers la gauche et vers le bas.

**Figure 2.2 : Fonction d'offre de stockage complète**



L'existence de rendements du stockage négatifs peut être expliquée de la façon suivante : pour Working, le rendement du stockage résulte de la confrontation de l'offre et de la demande de capacités de stockage. Dans un marché concurrentiel, lorsque les capacités de stockage disponibles sont excédentaires par rapport à la demande de service de stockage, les prix demandés par les détenteurs de stocks pour rémunérer ce service diminuent. Ces prix peuvent atteindre un niveau tel qu'ils ne couvrent plus les coûts totaux supportés par les offreurs de capacités de stockage. Deux éléments expliquent ce phénomène : la prépondérance des coûts fixes dans l'activité de stockage et l'existence d'un *convenience yield* associé aux stocks. Dans l'activité de stockage, la proportion des coûts évitables étant faible par rapport aux coûts totaux, la cessation de l'activité n'élimine que peu de coûts pour le propriétaire des capacités de stockage. A court terme, il peut être conduit à offrir ses services

---

<sup>14</sup> Le terme « fonction d'offre de stockage » est conservé pour employer la même terminologie que

même lorsque ses coûts totaux ne sont plus couverts, du moment que ses coûts variables le sont<sup>15</sup>. Le rendement du stockage, défini par Working comme la différence entre prix à terme et prix au comptant, devient négatif lorsque la demande de capacité de stockage devient rare, et que la concurrence entre les offreurs de capacité les conduit à offrir des prix ne couvrant pas la totalité de leurs coûts.

Si l'offre de capacités de stockage reste substantielle même lorsque la base est en déport, c'est de plus parce que la décision de stocker ne dépend pas uniquement du rendement des opérations de stockage : les offreurs de capacités de stockage sont en effet fréquemment impliqués dans des opérations de production, de transformation et/ou de commercialisation de commodités. Les capacités de stockage et les stocks sont dans ce cas un appoint nécessaire au déroulement normal de l'activité principale, également caractérisée par la présence de coûts fixes élevés. Un détenteur de stocks engagé dans un processus de production, de transformation ou de commercialisation caractérisé par la présence de coûts fixes élevés, peut donc maintenir des stocks en situation de déport pour répondre à des engagements antérieurs contractés dans le cadre de son activité principale.

Working explique donc la détention de stocks en situation de déport par la conjonction de deux éléments : la présence de coûts fixes élevés dans l'activité de stockage, de transformation et de production de la commodité ; la nécessité pour l'opérateur d'honorer des engagements. Ce dernier point implique donc qu'il existe un *convenience yield* associé à la détention de stocks productifs.

#### *1.4.2. Rendement du stockage et théorie des anticipations*

La théorie élaborée par Working le conduit à réfuter la théorie des anticipations, selon laquelle les prix au comptant ou les prix à terme rapprochés sont peu sensibles aux anticipations affectant l'évolution du prix à terme éloigné. Cette théorie est, à l'époque où Working réalise ses travaux sur les rendements du stockage, très répandue. La Federal Commission Trade, par exemple, utilise cette

---

<sup>15</sup> l'auteur. Précisons cependant qu'il s'agit ici d'offre de capacités de stockage.

interprétation de la relation de prix intertemporelle dans son rapport sur le commerce du grain, publié en 1924 :

*« Quel que soit le marché final pris en considération, la demande de blé sur le marché au comptant peut être conséquente, alors même que les spéculateurs opérant sur des échéances plus éloignées pensent peut-être que les prix auront diminué lorsque le contrat à terme sera parvenu à son échéance – en mai, par exemple. »<sup>16</sup>*

Dans ce contexte, le fait que les anticipations affectant les prix à terme éloignés n'aient pas d'impact sur le prix au comptant ni sur les prix à terme rapprochés explique la différence entre les prix courants et les prix éloignés.

Ses études empiriques sur le marché du blé<sup>17</sup>, et ses travaux sur les relations entre les prix de contrats parvenant à maturité avant et après une récolte conduisent Working à réfuter la théorie des anticipations. Si cette dernière offrait une explication correcte de la relation entre prix à terme et prix au comptant, les anticipations portant sur une récolte future ne devraient pas affecter les prix cotés pour une livraison avant cette récolte. Working observe au contraire que les anticipations concernant la récolte future affectent les prix de contrats parvenant à maturité avant et après la récolte.

Après avoir constaté que la théorie des anticipations ne se vérifiait pas sur le plan empirique, Working la réfute sur le plan théorique. En utilisant la notion de rendement du stockage, la relation de prix intertemporelle est exprimée de la façon suivante :

$$F_1 = F_2 - R_S$$

---

<sup>15</sup> P. N. Giraud, 1996 : « *La formation des prix des commodités : éléments d'analyse théorique* », Document de cours, Université Paris-IX.

<sup>16</sup> « *There may be an active demand for cash wheat, for example, at whatever terminal market is under consideration, while the speculators dealing in the more remote futures...may believe that prices are bound to go down markedly by the time the futures contract mature - for example in May.* »

<sup>17</sup> Sous le titre « *Wheat Studies for the Food Research Institute* » sont en particulier regroupées les études suivantes :

- « *The Post-Harvest Depression of Wheat Prices* », November 1929, VI(1)
- « *Price Relations between July and September Wheat Futures at Chicago since 1885* », March 1933, IX(6)
- « *Price Relations between May and New-Crop Wheat Futures at Chicago since 1885* », X(5)
- « *Price Relations of Liverpool Wheat Futures with Special Reference to the December-March Spread* », XVII(3).

- Avec
- $F_1$  : prix au comptant ou prix à terme pour l'échéance  $T_1$ ,
  - $F_2$  : prix à terme pour une échéance  $T_2$  ultérieure à  $T_1$ ,
  - $R_S$  : rendement du stockage, négatif ou positif.

Le prix rapproché  $F_1$  peut être expliqué par l'ensemble des influences affectant le prix plus distant  $F_2$ , et par celles, totalement distinctes des premières, affectant le rendement du stockage  $R_S$ . Les événements qui affectent  $R_S$  et  $F_2$  ne sont en effet pas identiques : le rendement du stockage  $R_S$  est établi en fonction du niveau de stocks prévu entre la date présente et la prochaine récolte et en fonction du niveau des capacités de stockage. A l'inverse, le prix à terme éloigné est influencé par le niveau de stocks futur (en admettant que les capacités de stockage n'ont pas varié entre les deux récoltes), c'est-à-dire le niveau prévu pour une date ultérieure à celle de la récolte. Parce que  $F_2$  et  $R_S$  sont totalement indépendants l'un de l'autre, les événements ayant un impact sur le prix le plus éloigné  $F_2$  ont approximativement la même influence sur le prix rapproché  $F_1$ .

La relation de prix proposée par Working peut également être formulée de la façon suivante :

$$F_2 - F_1 = R_S$$

La différence entre prix à terme éloigné et prix à terme rapproché est alors expliquée par le rendement du stockage, c'est-à-dire par le niveau courant de stocks.

## SECTION 2. L'ANALYSE DU CONVENIENCE YIELD

Les travaux théoriques postérieurs à ceux de Working accordent une place prépondérante à la notion de *convenience yield* pour expliquer la relation entre prix au comptant et prix à terme. Brennan (1958) et Weymar (1968) analysent en détail la composition du coût de stockage et, au sein de ces coûts, *le convenience yield*. Pour le premier de ces deux auteurs, une prime de risque doit être introduite dans l'analyse pour que la relation entre prix au comptant et prix à terme puisse être expliquée de façon satisfaisante (2.1). Pour le second, cette prime de risque est incluse dans le *convenience yield*, qui peut devenir négatif (2.2). Enfin, Kaldor et Weymar montrent que le *convenience yield* n'est pas uniquement associé à la détention de stocks physiques mais aussi à certaines opérations à terme (2.3).

## 2.1. *CONVENIENCE YIELD* ET PRIME DE RISQUE

La théorie de l'offre de stockage proposée par Brennan (1958), si elle utilise la même terminologie (l'offre de stockage) que celle de Working (1939), explique la relation entre prix au comptant et prix à terme à partir de la rencontre entre l'offre et la demande de stocks, et non pas à partir de la confrontation entre offre et demande de capacités de stockage. Cette théorie permet à Brennan d'aboutir à deux conclusions : en premier lieu, il montre que pour obtenir une explication satisfaisante de la relation entre prix à terme et prix au comptant, il est nécessaire d'introduire une troisième variable, la prime de risque marginale ; en second lieu, il montre que le *convenience yield* n'est pas seulement associé aux stocks productifs, comme l'analyse de Working (1949) pourrait le laisser penser, mais également aux stocks spéculatifs.

Le concept d'offre de stockage employé par Brennan ne correspond pas à une offre d'espace de stockage, mais à une offre de commodité stockée. Pour cet auteur, un offreur de stockage est identifié à un acteur (producteur, transformateur, négociant) détenant des stocks ou des droits de propriété sur des marchandises, et prévoyant de les revendre soit sous leur forme présente, soit après transformation.

Un demandeur de stockage est un acteur (consommateur) désirant que des stocks soient détenus pour lui pendant une période au cours de laquelle il n'a pas l'intention de les employer, jusqu'à une date ultérieure où il voudra en disposer. La production de certaines commodités étant irrégulière, le consommateur demande que la fonction de stockage soit assumée par les offreurs de stockage afin que le flux de commodité lui parvenant soit maintenu à un niveau relativement stable.

Pour accepter de détenir des stocks en situation d'incertitude, et de supporter le risque de variation de prix associé, les offreurs de stockage, s'ils sont averses au risque, exigent une prime de risque rémunérant le service qu'ils rendent. Selon Brennan, pour comprendre la relation entre prix à terme et prix au comptant, les notions de coût de stockage et de *convenience yield* ne sont donc pas suffisantes : il faut également prendre en considération une prime de risque.

L'auteur montre que dans un marché compétitif, une firme recherchant la maximisation de son profit détient un niveau de stock tel que son coût marginal net

de stockage soit égal à la variation de prix anticipée par unité de temps ; l'équilibre de marché est obtenu en faisant la somme des offres de stockage individuelles et en la confrontant à la demande de stockage collective. La relation de prix est formulée de la façon suivante :

$$E_t[S_{t+1}] - S_t = C_t(L_t) + \pi_t(L_t) - C_{yt}(L_t)$$

- Avec :
- $E_t[.]$  : anticipation à la date  $t$ ,
  - $S_t$  : prix au comptant en  $t$ ,
  - $C_t$  : coût de stockage marginal,
  - $L_t$  : niveau de stock courant en  $t$ ,
  - $\pi_t$  : prime de risque marginale en  $t$ ,
  - $C_{yt}$  : *convenience yield* marginal en  $t$ .

Le coût marginal net de stockage est composé de trois éléments : coût de stockage marginal (frais d'entreposage et frais financiers), *convenience yield* marginal, et prime de risque. Le coût de stockage marginal peut être considéré comme constant tant que les capacités de stockage ne sont pas saturées.

Le *convenience yield* est analysé en fonction de la catégorie d'acteur considérée. Pour le producteur, il est défini de la façon suivante :

*« Le convenience yield est attribué à l'avantage (en termes de moindres délais et de coûts plus faibles) d'être capable de continuer à satisfaire les clients habituels ou d'être capable de profiter d'une augmentation de la demande et des prix sans recourir à une modification du programme de production »<sup>18</sup>*

D'une façon équivalente, pour un transformateur, la disponibilité des stocks de matières premières permet de faire varier le rythme de production sans encourir les perturbations, les coûts et les délais associés à des achats et à des livraisons trop fréquents. Enfin, un négociant peut répondre à un flux croissant de commandes s'il possède suffisamment de stocks.

Brennan propose une définition du *convenience yield* plus étendue que celle de Kaldor : celui-ci ne correspond pas seulement au « confort » apporté par la

---

<sup>18</sup>M.J. Brennan, 1958 : « *The convenience yield is attributed to the advantage ( in terms of less delay and lower costs ) of being able to keep regular customers satisfied or of being able to take advantage of a rise in demand and price without resorting to a revision of the production schedule.* »

détention de stocks ; il comprend également l'avantage lié à la possibilité de profiter d'une éventuelle hausse des prix et de la demande sans avoir à subir un délai d'approvisionnement. Ainsi, les stocks qui procurent un *convenience yield* peuvent être des stocks spéculatifs. Pour Working, seuls les stocks productifs procuraient un tel rendement. Avec cette définition plus large de la notion de *convenience yield*, la distinction entre stocks productifs et stocks en surplus, selon laquelle les stocks en surplus ont un *convenience yield* nul parce qu'ils sont spéculatifs, devient caduque.

La prime de risque est une fonction croissante du niveau des stocks détenus par la firme. Lorsque ce niveau est faible, la perte associée à une baisse inattendue du prix des marchandises est relativement réduite ; le risque associé aux stocks est limité. Lorsqu'à l'inverse la quantité de stocks détenue représente une part importante des ressources de la firme, une baisse de prix de la même ampleur que la précédente constitue une perte considérable.

Pour valider cette théorie, Brennan utilise la méthode suivante : au sein de la relation d'équilibre définie précédemment, deux variables sont en principe directement observables, le prix au comptant et le coût pur de stockage marginal, identifié au coût de stockage pur moyen. Brennan estime le prix anticipé à partir des prix passés en ayant recours à une version de l'hypothèse d'anticipations adaptatives : les acteurs, en révisant leurs anticipations, prennent en considération non seulement les erreurs de prévision de la période précédente mais aussi celles des périodes antérieures. Un poids décroissant est affecté à ces erreurs au fur et à mesure que l'on s'éloigne dans le passé<sup>19</sup>.

Brennan utilise ces trois premières variables pour estimer le résidu de l'équation d'équilibre ( $\pi_t - C_{yt}$ ), c'est-à-dire la différence entre prime de risque marginale et *convenience yield* marginal. Si la prime de risque  $\pi_t$  n'existait pas, le *convenience yield*  $C_{yt}$  serait suffisant pour expliquer le niveau  $L_t$  de stocks détenu en  $t$ . L'évolution du résidu serait alors identique, au signe près, à celle du *convenience*

---

<sup>19</sup> L'auteur vérifie qu'il obtient les mêmes résultats empiriques en remplaçant le prix au comptant anticipé par le prix à terme.

*yield* marginal : important en valeur absolue pour un faible volume de stocks, il tendrait vers zéro au fur et à mesure que le niveau des stocks augmente. Les tests empiriques indiquent que la différence ( $\pi_t - C_{yt}$ ) n'est pas une fonction monotone décroissante des stocks avec une valeur maximum nulle, comme elle le devrait si l'hypothèse de prime nulle était confirmée. Au contraire, le résidu est positif pour un niveau important de stocks : la prime de risque existe.

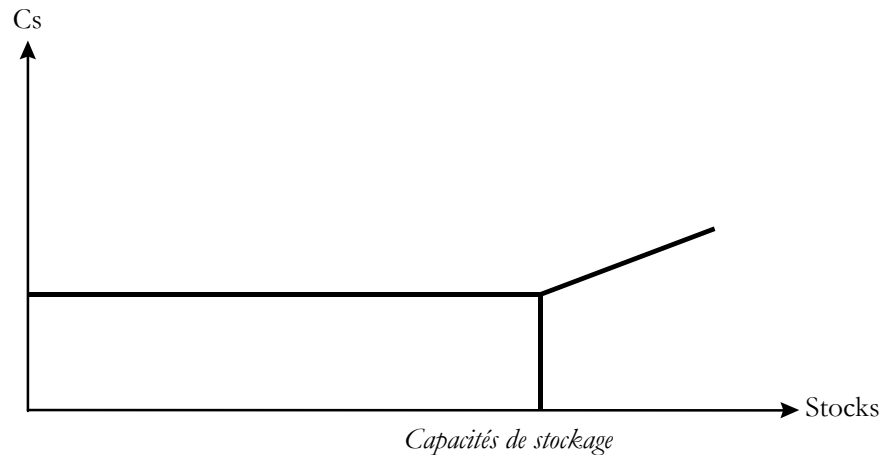
Cette étude ne permet cependant pas de distinguer la prime de risque du *convenience yield* : c'est la différence entre les deux variables qui est étudiée, et non chacune séparément. L'analyse proposée par Brennan est donc très proche de celle développée par Weymar en 1968 (cf ci-dessous). Pour le premier, le *convenience yield* apparaît lorsque les stocks sont faibles, et la prime de risque n'existe que lorsqu'ils sont abondants. Pour le second, une variable unique, le *convenience yield*, peut prendre des valeurs positives et négatives en fonction du niveau de stock.

## 2.2. RENDEMENT DE RESERVE ET RENDEMENT DE COUVERTURE

Weymar apporte une précision supplémentaire à la définition du coût marginal total de détention des stocks en identifiant les trois éléments qui le composent : le coût pur de stockage, le rendement de réserve (*stockout yield*) et le rendement de couverture (*coverage yield*). Son analyse est, dans un premier temps, menée au niveau individuel, pour un transformateur.

Le coût pur de stockage (location des entrepôts, primes d'assurance...) peut être considéré comme constant, quel que soit le niveau de stocks, tant que les capacités de stockage ne sont pas saturées. La figure 2.3. représente l'évolution du coût pur du stockage en fonction du niveau des stocks.

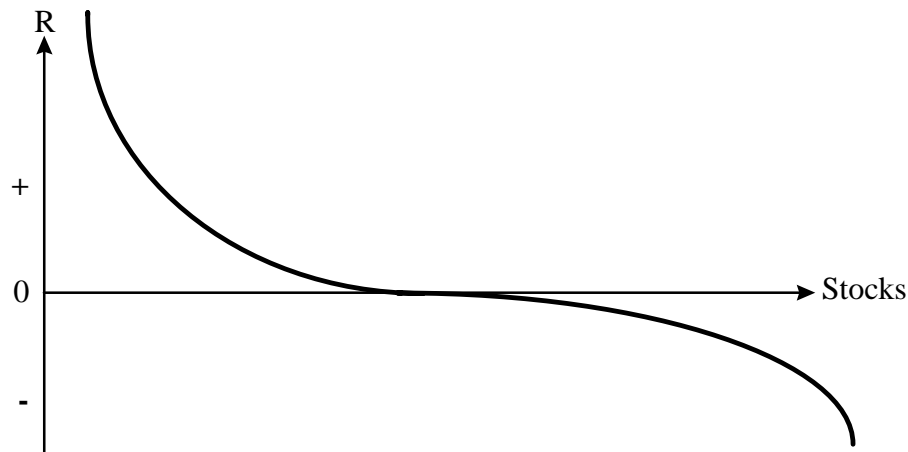


**Figure 2.3 : Coût pur de stockage**

$C_s$  : coût pur de stockage.

Le rendement de réserve des stocks est lié pour un transformateur à la nécessité d'assurer la continuité de sa production. S'engager dans une activité de transformation de commodités nécessite en effet de réaliser des investissements significatifs dans des biens d'équipement. En cas de rupture d'approvisionnement, ceux-ci sont temporairement inutilisés, et le transformateur ne peut plus couvrir ses frais de fonctionnement. La détention d'un stock de réserve permet au transformateur de couvrir au moins ses coûts variables. Plus le risque de rupture d'approvisionnement est important, plus le rendement de réserve associé à un stock augmente : celui-ci est une fonction décroissante du niveau des stocks.

Les stocks d'un transformateur représentent de plus un certain nombre de jours de production : ils assurent ainsi la « couverture » d'un niveau donné de production. Cette couverture doit être maintenue à un niveau tel qu'elle assure la continuité de l'activité sans menacer la compétitivité du transformateur. Si les stocks de matières premières du transformateur sont pléthoriques par rapport à ceux de ses concurrents, et que les prix des produits finis et des matières premières baissent, celui-ci subira une réduction de sa marge de transformation, son coût d'approvisionnement devenant supérieur à celui de ses concurrents. Le rendement de couverture est donc négatif au-delà d'un certain niveau de stocks, déterminé par l'ensemble de l'industrie. A l'inverse, lorsque les stocks n'assurent pas la couverture « normale » de la production du transformateur, le rendement de couverture associé à la détention de stocks devient positif.

**Figure 2.4 : Rendement de couverture**

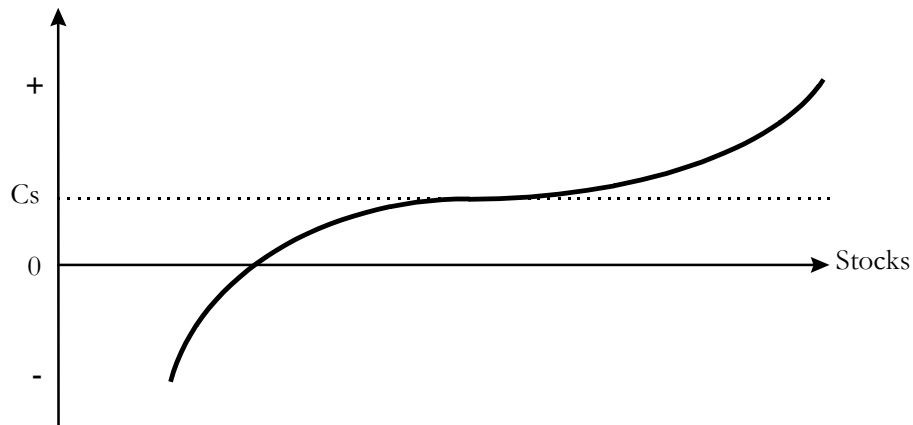
*R : rendement de couverture.*

A travers l'analyse du rendement de couverture, Weymar fait le lien entre comportement individuel de stockage et comportement de l'ensemble de l'industrie. La limite de son analyse réside dans le fait qu'exceptée la comparaison réalisée avec le niveau de couverture des concurrents, Weymar ne propose aucune définition de ce que pourrait être le niveau « normal » de couverture pour un transformateur. L'étude de D. Long, réalisée en 1996 sur le marché pétrolier, est une tentative de réponse à cette question, non pas au niveau individuel, mais à celui du marché<sup>20</sup>.

Weymar définit le coût marginal total de détention des stocks en additionnant ses trois composantes : ce coût marginal total correspond au coût pur marginal de stockage, auquel sont soustraits les rendements marginaux de réserve et de couverture. La somme des rendements marginaux de réserve et de couverture constitue le *convenience yield* marginal, qui peut devenir négatif. La figure 2.5 représente la courbe de coût marginal de détention des stocks.

---

<sup>20</sup> Cette étude est analysée en sous-section 3.3.2. de ce chapitre.

**Figure 2.5 : Coût marginal de détention des stocks**

$C_s$  : coût pur marginal de stockage.

Lorsque les stocks sont peu élevés, le *convenience yield* marginal est supérieur au coût pur marginal de stockage, et le coût marginal total de détention des stocks est négatif. Au fur et à mesure que le niveau des stocks augmente, le *convenience yield* marginal diminue jusqu'à devenir nul lorsque le coût marginal total de détention est égal au coût pur marginal de stockage. Enfin, lorsque le niveau des stocks augmente, le coût marginal total de détention augmente, reflétant d'une part la hausse des coûts de stockage lorsque les capacités de stockage parviennent à saturation et d'autre part le *convenience yield* devenu négatif du fait d'une couverture excessive.

D'autres acteurs que les transformateurs détiennent des stocks dans un marché de commodités ; Weymar les regroupe en une seule catégorie : les spéculateurs. Ces acteurs sont prêts à détenir des stocks s'ils estiment que la différence entre prix au comptant anticipé et prix au comptant courant est suffisante pour couvrir leurs coûts de détention et pour leur procurer en plus un rendement satisfaisant.

La courbe de demande de stocks physiques des spéculateurs est semblable à celle des transformateurs : même lorsque la base est négative, des stocks spéculatifs peuvent être détenus, parce que certains spéculateurs ont des anticipations différentes de celles exprimées dans les prix. Plus la base anticipée est importante, et plus les stocks spéculatifs augmentent, jusqu'à ce que les capacités de stockage ou de financement des spéculateurs parviennent à saturation.

Pour Weymar, contrairement à Brennan, spéculateurs et transformateurs sont des demandeurs de stocks ; la demande totale du marché correspond à la somme de celle des transformateurs et des spéculateurs. Seconde différence entre ces deux auteurs : pour Brennan, c'est uniquement la possession de stocks physiques qui permet de bénéficier du *convenience yield*, alors que pour Weymar, l'achat de contrats à terme étant identifié à une demande de stocks, il existe un *convenience yield* associé à la détention de contrats à terme.

### 2.3. *CONVENIENCE YIELD*, CONTRATS *FORWARD* ET CONTRATS A TERME

Avant Weymar, Kaldor (1939, a) avait montré que la notion de *convenience yield* pouvait être appliquée aux positions *forward* sur un marché de commodité, à condition d'opérer une distinction entre les différentes positions prises sur le marché *forward*. Selon cet auteur, un achat *forward* indépendant de toute opération sur le marché physique permet de bénéficier du *convenience yield*, puisqu'il assure la disponibilité future de la marchandise ; ce n'est pas le cas pour l'opération symétrique, à savoir une vente *forward*. De plus, lorsqu'une opération d'achat sur le marché au comptant est associée à une vente *forward* simultanée (opération d'arbitrage *cash and carry*), le *convenience yield* associé à l'achat sur le marché au comptant est largement perdu du fait de la vente *forward*.

A la suite de Kaldor, Weymar analyse le *convenience yield* associé à la détention de contrats à terme, et non plus seulement à celle de positions *forward* sur le marché physique. Selon cet auteur, la demande de contrats à terme<sup>21</sup> est presque entièrement identifiée à une demande de stocks.

Pour le transformateur, dès lors que la rupture d'approvisionnement est évitée, toute unité supplémentaire de stock apporte un *convenience yield* marginal sous forme de rendement de couverture ; ce rendement peut aussi bien être offert par une unité de stock physique que par un contrat à terme. Ainsi, la courbe de demande de stocks du transformateur sur le marché à terme a sensiblement la même forme que sur le marché physique, excepté le fait qu'elle ne reflète pas le rendement de réserve.

---

<sup>21</sup> Les positions d'achat sur le marché à terme.

La logique sous-tendant la demande de contrats à terme des spéculateurs est identique à celle guidant la demande de stocks physiques, à ceci près que le spéculateur peut détenir une position courte sur le marché à terme, ce qui est impossible sur le marché physique. Lorsque la base anticipée est nulle, la position spéculative nette est nulle. Lorsque la différence entre prix au comptant anticipé et prix au comptant courant augmente, la demande spéculative de contrats à terme suit la même évolution. Elle augmente tant que les capacités de financement des spéculateurs ne sont pas parvenues à saturation.

Au regard du rendement de couverture, Weymar ne réalise aucune distinction entre stock physique et stock papier : les achats sur le marché à terme sont considérés comme des acquisitions de stocks<sup>22</sup>. Par contre, les contrats à terme ne permettent pas de bénéficier de l'autre composante du *convenience yield*, le rendement de réserve ; ils n'assurent pas, en effet, la continuité des opérations de production.

En utilisant la définition proposée pour le *convenience yield* par Brennan, il est possible de mettre en évidence une seconde raison pour laquelle le *convenience yield* associé aux contrats à terme est inférieur à celui associé aux stocks : la possibilité de profiter immédiatement d'une hausse des prix et de la demande est une caractéristique offerte uniquement par les stocks physiques.

Le fait que les contrats à terme, parce qu'ils incluent la possibilité d'obtenir une livraison physique à l'échéance, assurent la disponibilité future de la marchandise, explique qu'un *convenience yield* leur soit associé. Dans ce contexte, la fonction des marchés à terme de commodités n'est pas d'assurer le transfert du risque entre les différents opérateurs du marché à terme, mais de permettre aux acteurs du marché physique d'étaler leur approvisionnement dans le temps.

Jusqu'à la fin des années 60, l'existence d'un *convenience yield* associé à la détention de contrats à terme n'a été mentionnée, à notre connaissance, que par Kaldor et Weymar ; elle est ensuite tombée dans l'oubli pendant près de trois décennies, pour resurgir en 1986<sup>23</sup>, puis en 1998<sup>24</sup>, à l'occasion de l'application des

---

<sup>22</sup> Weymar semble donc négliger, dans cette analyse, le fait que la détention de stocks physiques génère des frais financiers pour l'opérateur, ce qui n'est pas le cas de la détention de stocks papier.

<sup>23</sup> Simon Y., 1986, p 181 : « On a pu soutenir que pour une marchandise échangée sur un marché à terme ce rendement [*convenience yield*] était négligeable (Blau, 1944-45, p. 6) car les qualités requises pour qu'un bien soit négocié à terme (volume important, qualité standard) et la possibilité

modèles stochastiques aux marchés de commodités. L'analyse présentée ci-dessus permet de comprendre ce phénomène : seuls les achats de contrats à terme indépendants de toute opération au comptant sur le marché physique permettent en effet de bénéficier du *convenience yield*. De plus, celui-ci est inférieur au *convenience yield* attaché à la possession de stocks physiques, puisqu'il ne comprend pas le rendement de réserve et n'apporte pas la possibilité de profiter de hausses temporaires de la demande. Enfin, la notion de *convenience yield* a surtout été développée dans le but de comprendre la détention de stocks en situation de déport. Les tests empiriques ayant pour objet de valider la théorie du stockage négligent donc le *convenience yield* associé à la détention de contrats à terme.

### SECTION 3. VALIDATION EMPIRIQUE DE LA THEORIE DU STOCKAGE

Avant d'aborder l'exposition des principales études empiriques réalisées pour valider la théorie du stockage, les implications testables de cette dernière sont présentées (3.1). Les études empiriques sont ensuite séparées en deux grandes catégories. Les premières permettent de mettre en évidence, à travers l'analyse des relations entre prix au comptant et prix à terme, le fait que les marchés de commodités diffèrent selon deux principaux critères : le caractère saisonnier ou non de la commodité considérée, et le coût de stockage de la commodité, plus élevé pour les commodités périssables ou délicates à manipuler (3.2). Les études empiriques appartenant à la seconde catégorie sont toutes consacrées au marché pétrolier (3.3).

#### 3.1. IMPLICATIONS TESTABLES DE LA THEORIE DU STOCKAGE

Certaines implications testables de la théorie du stockage sont communes à toutes les commodités. Elles peuvent être distinguées en fonction de leur caractère

---

*d'obtenir ce bien très facilement, suppriment les avantages liés à la détention de contrats à terme. Cette argumentation semble excessive et nous admettons que le rendement d'opportunité [convenience yield] n'est jamais totalement négligeable. »*

direct ou indirect. D'autres découlent du caractère saisonnier des commodités considérées.

La première implication testable de la théorie du stockage est dérivée de l'analyse des relations d'arbitrage des opérateurs entre le marché physique et le marché à terme, présentée en sous-section 1.1 de ce chapitre. Si cette analyse est correcte, la corrélation entre la base et les stocks doit être positive : lorsque les stocks sont abondants, la base doit être positive. Plus précisément, le prix à terme doit être supérieur au prix au comptant d'un montant correspondant aux coûts de stockage. Inversement, la base doit être négative lorsque les stocks sont rares.

Trois autres implications de la théorie du stockage sont qualifiées d'implications indirectes, car elles reposent sur l'hypothèse selon laquelle la relation entre prix et stocks est vérifiée, et ont pour objet d'analyser les conséquences qui en découlent.

En premier lieu, la volatilité de la base doit être plus importante en situation de déport qu'en situation de report, le déport traduisant un niveau de stocks insuffisant pour amortir les fluctuations de prix. Ensuite, les prix au comptant doivent être plus volatiles que les prix à terme en situation de déport (lorsque le niveau des stocks est faible) ; en revanche, en situation de report (lorsque le niveau des stocks est élevé), les volatilités des prix au comptant et des prix à terme doivent être équivalentes. Enfin, d'après l'analyse présentée en seconde section de ce chapitre, le *convenience yield* est une fonction décroissante du niveau des stocks. La corrélation entre *convenience yield* et niveau des stocks doit donc être négative. Cependant, le *convenience yield* n'étant pas directement observable, l'existence d'une corrélation négative entre celui-ci et le niveau des stocks est soit simplement admise (Cho et Mc Dougall, 1990), soit supposée découler du comportement de la base (Fama et French, 1987 ; Artus et Kaabi, 1991) : si la base est négative lorsque les stocks sont rares, c'est que le *convenience yield* est élevé ; inversement, si la base est positive lorsque les stocks sont abondants, le *convenience yield* est faible.

---

<sup>24</sup> Miltersen K.E, Schwartz E.S., 1998. Ce point est repris en détail au chapitre trois, section deux.

Pour les commodités saisonnières<sup>25</sup>, deux implications testables de la théorie du stockage peuvent être distinguées. En premier lieu, le fait que l'offre soit discontinue entraîne un comportement spécifique des stocks et donc des prix au cours de l'année de récolte : au moment de la récolte, les stocks sont constitués et ajoutés à ceux n'ayant pas été consommés l'année précédente. Leur niveau décline ensuite progressivement jusqu'à la récolte suivante ; au fur et à mesure que la date de récolte approche, la probabilité pour que le prix à terme rapproché devienne inférieur au prix au comptant augmente. De ce fait, le *convenience yield* associé à la détention de stocks doit être croissant lorsque la date de récolte approche.

De plus, lorsque les commodités sont saisonnières, les différentiels de prix cotés pour des dates de livraison antérieures à la récolte doivent être plus corrélés entre eux qu'ils ne le sont avec les différentiels de prix cotés pour des dates de livraison « enjambant » la date de la récolte<sup>26</sup>, ou avec les différentiels de prix pour des dates de livraison ultérieures à la date de récolte. En effet, à la fin de l'année de récolte, période où le niveau des stocks est faible, une situation de pénurie peut apparaître. Dans ce cas, les prix à terme pour des livraisons avant et après la récolte évoluent différemment : la différence entre le prix au comptant et un prix à terme pour une livraison après la prochaine récolte est positive, alors que la différence entre le prix au comptant et un prix à terme pour une livraison avant la récolte est négative. La situation de pénurie de stocks ne prévalant que jusqu'à la prochaine récolte, elle n'affecte que les prix rapprochés.

### 3.2. LES TESTS REALISES (HORS PETROLE)

Pour un grand nombre de commodités, et pour diverses périodes d'études, les études empiriques conduisent à valider la théorie du stockage, pour des commodités saisonnières telles que les commodités agricoles (3.2.1), comme pour des commodités non saisonnières, telles que les métaux (3.2.2).

---

<sup>25</sup> L'analyse de la saisonnalité des commodités agricoles peut apporter des éléments de compréhension du fonctionnement des marchés des produits pétroliers, qui sont, eux, affectés par une saisonnalité de la demande.

<sup>26</sup> Ce terme signifie que les deux prix à terme considérés correspondent, l'un à une échéance de livraison précédant la récolte, l'autre à une échéance de livraison postérieure à la récolte.



### 3.2.1. Analyse des commodités agricoles

L'étude de Dutt, Fenton, Smith et Wang (1997), se situe dans le prolongement des travaux de Telser, réalisés en 1958 sur les marchés du soja et du coton, de 1926 à 1954. Celui-ci avait montré que, pour ces deux commodités, les différentiels de prix à terme cotés pour des livraisons au sein d'une même année de récolte étaient plus corrélés entre eux qu'ils ne l'étaient avec des différentiels de prix à terme « enjambant » la date de récolte.

Dutt *et alii* testent, sur sept marchés de commodités agricoles<sup>27</sup>, de 1983 à 1991, l'hypothèse selon laquelle il peut y avoir, du fait de la saisonnalité, des différences substantielles entre le comportement d'une base inter récolte (différentiels de prix à terme cotés pour des livraisons avant et après la récolte) et celui d'une base intra récolte (différentiels de prix à terme cotés pour des livraisons antérieures à la date de récolte).

Les auteurs parviennent aux conclusions suivantes : les variations des bases intra récolte sont plus fortement corrélées entre elles qu'elles ne le sont avec les variations des bases inter récolte. De plus, la volatilité de la base intra récolte est souvent supérieure à celle de la base inter récolte. Ces résultats sont cohérents avec la théorie du stockage et peuvent être expliqués par des niveaux différents de *convenience yield* au cours de l'année de récolte.

### 3.2.2. Commodités saisonnières et commodités industrielles : les études de Fama et French (1987 et 1988)

Pour évaluer la pertinence de la théorie du stockage, Fama et French réalisent deux types d'études : en premier lieu, ils établissent une comparaison entre commodités agricoles et commodités industrielles<sup>28</sup>. Si la théorie du stockage est

---

<sup>27</sup> Maïs, avoine, blé, huile de soja, graines de soja, farine de soja et coton.

<sup>28</sup> Milonas et Thomadakis (1997) ont également étudié la portée de la théorie du stockage en comparant les résultats obtenus lorsque les commodités sont saisonnières et lorsqu'elles ne le sont pas. Leurs conclusions sont proches de celles de Fama et French.

vérifiée, le comportement saisonnier du *convenience yield* doit se manifester pour les commodités agricoles, mais pas pour les commodités industrielles (3.2.2.a). Ensuite, les deux auteurs approfondissent leur analyse du comportement des prix des commodités non saisonnières et montrent que ce comportement varie selon les différentes phases du cycle économique (3.2.2.b).

### 3.2.2.a. Comparaison entre commodités agricoles et commodités industrielles (1987)<sup>29</sup>

L'étude de 1987 porte sur vingt et un marchés de commodités, de 1967 à 1984. Ces commodités sont regroupées en trois catégories : produits agricoles, métaux, et produits animaux.

Au sein des coûts de stockage, Fama et French distinguent deux composantes : le coût pur de stockage associé aux frais de location des entrepôts, aux primes d'assurance, à la manipulation, ... qui est considéré comme constant, et les frais financiers, fonction du taux d'intérêt et proportionnels aux stocks. La relation entre prix à terme et prix au comptant est exprimée de la façon suivante :

$$F(t,T) - S(t) = S(t) \times R(t,T) + W(t,T) - C(t,T)$$

Avec : -  $F(t,T)$  : prix à terme en  $t$  du contrat parvenant à échéance en  $T$ ,

-  $S(t)$  : prix au comptant en  $t$ ,

-  $R(t,T)$  : taux d'intérêt entre  $t$  et  $T$ ,

-  $W(t,T)$  : coût pur de stockage entre  $t$  et  $T$ ,

-  $C(t,T)$  : *convenience yield* marginal entre  $t$  et  $T$ .

Ce qui peut également s'écrire :

$$\frac{[F(t,T) - S(t)]}{S(t)} = R(t,T) + \frac{[W(t,T) - C(t,T)]}{S(t)}$$

Fama et French cherchent en premier lieu à mettre en évidence empiriquement l'existence d'une corrélation négative entre *convenience yield* et niveau des stocks. Ne disposant pas de données sur les stocks pour toutes les

---

<sup>29</sup>Une partie de cette étude est consacrée à l'évaluation de la validité de la théorie du déport normal. Elle a été analysée au premier chapitre.

commodités étudiées, ils utilisent une méthode de test indirecte fondée sur l'analyse de la saisonnalité : la saisonnalité de la production ou de la demande doit logiquement entraîner celle des stocks. Or, si la théorie du stockage est vérifiée, la saisonnalité des stocks engendre celle de la base et, par conséquent, celle du *convenience yield*. L'analyse de la saisonnalité de la base est donc réalisée pour les trois groupes de commodités.

La formulation de la relation entre prix à terme et prix au comptant permet également de montrer que, pour un *convenience yield* et un coût pur de stockage donnés, la variation de la base doit être parfaitement corrélée avec celle du taux d'intérêt. La seconde série de tests porte sur cette hypothèse.

Les métaux précieux, parmi les commodités étudiées, sont ceux dont la base est la moins variable (écart-type de 2% pour l'or, 1,5% pour l'argent, et 4,2% pour le platine) ; viennent ensuite les produits agricoles, pour lesquels l'écart-type de la base s'étend de 4,6% pour le maïs à 9,7% pour l'avoine. Les produits animaux sont ceux dont la base est la plus variable : son écart-type atteint 22,2% pour les oeufs.

Ces résultats sont cohérents avec la théorie du stockage : les différences constatées sont expliquées par des disparités entre les coûts purs de stockage de ces commodités et par la saisonnalité. Plus le coût pur de stockage est élevé relativement à la valeur des stocks, plus les opérations de stockage ont tendance à être retardées, et plus les prix au comptant et la base sont variables. Le coût de stockage des métaux est faible par rapport à leur valeur ; de plus, ces commodités ne sont pas saisonnières. Il est donc naturel que ce groupe de commodités soit caractérisé par une base relativement stable. De même, il est logique que les commodités périssables et délicates à manipuler ou à stocker soient caractérisées par un coût pur de stockage élevé et une base volatile<sup>30</sup>. Enfin, la saisonnalité de la base, nulle pour les métaux, caractérise la plupart des commodités agricoles.

Les deux auteurs réalisent ensuite une régression de la base sur le taux d'intérêt nominal. Pour les trois groupes de commodités, la corrélation entre base et taux d'intérêt est confirmée.

---

<sup>30</sup> Brennan, en 1958, avait déjà comparé les rendements du stockage pour des commodités semi-périssables et pour des commodités durables. Il était parvenu à des conclusions équivalentes.

### 3.2.2.b. Marchés des métaux et cycle économique (1988)

Fama et French (1988) testent ensuite sur des commodités non saisonnières l'hypothèse selon laquelle le *convenience yield* marginal diminue au fur et à mesure que les stocks augmentent. La théorie du stockage leur permet également d'expliquer le comportement de la base lors de phases de retournement du cycle économique. Plus particulièrement, en phase de reprise, la production s'adapte avec retard aux chocs positifs de la demande, ce qui a pour conséquence de diminuer le niveau des stocks, d'augmenter le *convenience yield*, et d'engendrer des bases négatives.

Pour valider l'hypothèse selon laquelle le *convenience yield* associé aux stocks diminue au fur et à mesure que les stocks augmentent, Fama et French recourent là encore à des tests indirects : ils considèrent en effet que les données agrégées disponibles sur les stocks sont particulièrement difficiles à manipuler car elles posent un double problème de définition et de précision, lié à la nature des stocks et à leur localisation<sup>31</sup>. Le fait qu'une base négative reflète un faible niveau de stocks, et inversement qu'une base positive traduit l'existence de stocks abondants est considéré comme acquis.

L'une des implications testables de la théorie du stockage est que la variation relative des prix à terme et des prix au comptant est une fonction du niveau des stocks. Ces différences de volatilité doivent être plus importantes lorsque les stocks sont faibles et donc incapables de réaliser un ajustement entre l'offre et la demande, que lorsque les stocks sont abondants. Dans ce cas en effet, la volatilité des prix au comptant et des prix à terme est sensiblement la même car les stocks absorbent les chocs. L'hypothèse selon laquelle les prix à terme varient moins que les prix au comptant devrait donc être mise en évidence plus facilement lorsque les stocks sont rares<sup>32</sup>, par exemple en phase de la reprise du cycle économique.

---

<sup>31</sup> Ce point est analysé en détail en section quatre de ce chapitre.

<sup>32</sup> Le niveau des stocks n'est pas le seul facteur permettant d'expliquer la plus grande volatilité des prix à court terme. Heinkel et *alii* (1990) montrent en effet que la différence de volatilité entre prix au comptant et prix à terme dépend des coûts marginaux de production. Plus ces coûts sont élevés, plus l'offre sera longue à s'adapter aux chocs.

Les auteurs supposent également que les chocs sur l'offre et sur la demande ont un impact supérieur sur les prix à terme pour une date rapprochée que sur ceux correspondant à une date éloignée, parce que les chocs sont progressivement compensés par des modifications de l'offre et de la demande. Les élasticités par rapport au prix de l'offre et de la demande sont en effet plus faibles à court terme qu'à long terme : les chocs affectant l'offre et la demande génèrent donc une plus grande volatilité des prix à terme rapprochés.

Les tests empiriques réalisés sur les marchés de métaux précieux et industriels, de 1972 à 1983, confirment les hypothèses formulées : la base sur les marchés étudiés est plus volatile lorsqu'elle est négative, en particulier pour les métaux industriels. De plus, les variations des prix à terme sont à peu près identiques à celles des prix au comptant quand la base est positive ; lorsqu'elle est négative, les chocs sur l'offre et sur la demande entraînent des variations plus fortes des prix au comptant.

Enfin, les tests montrent que le comportement de la base est influencé par l'évolution du cycle économique, pour la plupart des métaux. Au cours de la période étudiée, l'activité économique connaît deux phases de retournement particulièrement violentes en 1973-74 et en 1979-80. Les prix des métaux augmentent considérablement avant 1973, atteignent leur niveau maximal en 1974, puis diminuent. L'augmentation des prix se manifeste à nouveau en 1979, le maximum étant atteint en 1980. En 1973-74, les bases sont négatives pour tous les métaux excepté l'or ; en 1979-80, le même phénomène est observé, sauf pour le marché du zinc. Les auteurs expliquent la présence de bases négatives autour de ces deux phases de retournement du cycle à partir des conclusions de la théorie du stockage : dans une industrie où la production ne peut être immédiatement ajustée aux variations de la demande, un choc positif de la demande entraîne une réduction des stocks, une augmentation du *convenience yield*, et l'apparition de bases négatives.

### 3.2.3. Les tests réalisés hors pétrole : conclusion

Les tests empiriques présentés en sous-section 3.2 de ce chapitre permettent, de façon unanime, de valider la théorie du stockage. Leur apport principal est de

mettre en évidence les particularités du comportement de la base pour des commodités saisonnières et pour des commodités industrielles. En l'absence de données de stocks satisfaisantes, la relation liant les prix et les stocks, au centre de la théorie du stockage, est cependant relativement peu explorée. Ce sont surtout les implications indirectes de la théorie du stockage sur l'évolution relative des prix au comptant et des prix à terme qui sont au centre de ces études. Cette précision n'est pas sans importance : elle signifie en effet que la théorie du stockage n'est validée qu'au sens faible, c'est-à-dire en supposant acquise l'existence d'une relation entre prix et stocks.

### 3.3. L'APPLICATION DE LA THEORIE DU STOCKAGE AU MARCHE PETROLIER

Les tests empiriques réalisés dans le cadre du marché pétrolier conduisent, comme les précédents, à valider la théorie du stockage. Ce marché présente un certain nombre de caractéristiques permettant de réaliser des tests spécifiques (3.3.1). En particulier, l'existence de marchés à terme pour le pétrole brut et pour deux produits raffinés (le fioul domestique et l'essence) autorise la comparaison du comportement de la base en amont et en aval du processus de raffinage, et la vérification de nouvelles relations entre les prix et les *convenience yield* de ces marchés (3.3.2).

#### 3.3.1. Caractéristiques du marché pétrolier

Le marché pétrolier présente des caractéristiques ayant un impact sur la relation entre prix à terme et prix au comptant et sur le type de tests empiriques réalisés pour valider la théorie du stockage. Le fait que la demande de produits pétroliers soit saisonnière (3.3.1.a), associée à l'existence d'un processus de production joint (3.3.1.b), implique une évolution différente de la base sur chacun des marchés de produits pétroliers en fonction des saisons.

Par ailleurs, l'analyse des données de stocks dans le marché pétrolier présente plusieurs difficultés (3.3.1.c), de telle sorte que les études empiriques réalisées sur le marché pétrolier ont principalement recours à des tests indirects.

### **3.3.1.a. Saisonnalité de la demande**

Contrairement aux commodités agricoles saisonnières, pour lesquelles l'offre est discontinue et le niveau de stock déterminé au moment de la récolte, l'offre de produits pétroliers est continue. C'est la demande qui est saisonnière.

Le marché du fioul domestique se trouve généralement en situation de déport du mois de décembre au mois de mars, alors que celui de l'essence est en déport de juin à novembre. La principale conclusion de la théorie du stockage, selon laquelle le niveau de la base évolue en fonction du niveau des stocks, permet d'expliquer ce phénomène : un déport se manifeste sur un marché lorsque le niveau des stocks est faible. Cette situation de pénurie survient sur le marché du fioul à la fin de l'hiver, lorsque les raffineurs diminuent le rendement de leur outil de production en produits lourds, et constituent des stocks d'essence pour préparer la saison estivale, au cours de laquelle la demande de produits légers atteint son niveau maximal<sup>33</sup>. A l'inverse, sur le marché des carburants, le déport apparaît lorsque les raffineurs se préparent à l'arrivée de l'hiver et à une forte demande de fioul domestique. Les fluctuations de la base ont donc un caractère saisonnier dans les marchés des produits raffinés. Plus précisément, les bases sur les deux principaux marchés des produits, fioul et essence, ont tendance à être inversement corrélées : le marché du fioul est généralement en report lorsque celui de l'essence est en déport, et inversement.

### **3.3.1.b. Processus de production joint**

La saisonnalité de la demande n'est pas l'unique facteur explicatif de l'évolution de la base sur les marchés des produits pétroliers. Le comportement de stockage des opérateurs est en effet également expliqué par le fait que la production

---

<sup>33</sup> Edwards F.R, Canter M.S., 1995 : « The Collapse of Metallgesellschaft : Unhedgeable Risks, Poor Hedging Strategy, or Just Bad Luck ? », *The Journal of Futures Markets*, vol. 15, n°3, pp 211-264.

de produits raffinés est un processus joint : à partir d'un baril de pétrole brut, il est impossible de produire de l'essence sans produire simultanément le reste de la gamme des produits pétroliers. Pour cette raison, l'offre de produits ne peut s'adapter précisément aux fluctuations de la demande, et des stocks fatals de produits sont conservés jusqu'à ce que la demande pour ces produits augmente<sup>34</sup>. Au cours de l'été par exemple, c'est la demande de produits légers qui détermine le niveau des stocks de fioul.

### **3.3.1.c. L'analyse des données de stocks**

L'analyse des données de stocks dans le marché pétrolier présente plusieurs difficultés. En premier lieu, le marché pétrolier est caractérisé par la présence de stocks stratégiques, qui peuvent être constitués, selon les pays, de produits pétroliers et/ou de pétrole brut. L'influence éventuelle de ces stocks stratégiques sur le niveau des stocks privés et sur les prix est l'objet de controverses, liées à la qualité des stocks stratégiques et au processus de décision qui peut conduire à les utiliser.

La validation de la théorie du stockage est également rendue difficile par l'absence de données concernant les stocks détenus par les producteurs. Ceux-ci ne font en effet l'objet d'aucune publication. Enfin, les données statistiques sur les stocks sont considérablement agrégées ; lorsqu'elles sont disponibles, elles comprennent les marchandises effectivement entreposées, mais également celles en transit, et les marchandises non utilisables immédiatement : le contenu des pipelines et le fond des bacs, qui peuvent représenter 10% des volumes totaux<sup>35</sup>.

En l'absence de données de stocks fiables pour valider la relation entre prix et stocks formulée par la théorie du stockage, les études empiriques réalisées sur le marché pétrolier utilisent principalement des tests de type indirect.

---

<sup>34</sup> L'offre de produits pétroliers n'est cependant pas totalement rigide : les raffineurs disposent d'une certaine marge de manoeuvre, qui dépend de la qualité de brut employée (un brut soufre permet de produire plus de produits lourds qu'un brut léger) et du degré de sophistication de l'outil de raffinage.

<sup>35</sup> Il est également possible de considérer que les gisements pétroliers constituent des stocks en terre. Là encore, l'estimation du niveau des réserves disponibles est une tâche délicate.



### 3.3.2. Les études réalisées sur les marchés pétroliers

Long (1996) utilise la théorie du stockage et les relations de prix qu'elle implique pour proposer une mesure du besoin collectif de stocks dans l'industrie pétrolière. (3.3.2.a) Par ailleurs, la théorie du stockage est dans l'ensemble vérifiée sur les marchés pétroliers. Les tests empiriques permettent de montrer que le *convenience yield* évolue de façon inverse sur le marché du pétrole brut et sur les marchés des produits pétroliers. (3.3.2.b). De plus, les résultats obtenus sur le marché du pétrole brut sont systématiquement moins convaincants qu'ils ne le sont sur les marchés des produits pétroliers (3.3.2.c).

#### 3.3.2.a. Besoin collectif de stocks dans les marchés pétroliers : Long (1996).

Reprenant la distinction introduite par Keynes entre stocks productifs et stocks excédentaires, Long (1996) utilise les conclusions de la théorie du stockage pour interpréter la corrélation entre la base et le niveau des stocks de la façon suivante : les prix sont en déport lorsque l'industrie détient un niveau de stocks inférieur à celui dont elle a besoin, en report dans le cas inverse. Cette notion de « besoin » de stocks est proche de celle de niveau de stocks « normal », invoquée par Weymar (1968) pour analyser le comportement de stockage individuel.

Weymar ne proposait aucune définition précise du niveau de stocks normal ni aucun moyen de le mesurer. Ce niveau était simplement censé être évalué par l'opérateur individuel en fonction de celui de ses concurrents. Long propose d'étudier le besoin de stocks au niveau collectif, en utilisant la base comme témoin de ce niveau. Selon cet auteur, le niveau de stocks auquel la base s'inverse reflète celui dont l'industrie a besoin pour gérer ses opérations quotidiennes. Ce besoin correspond à la nécessité pour l'ensemble de l'industrie d'assurer la continuité des opérations de production et de prévenir toute rupture d'approvisionnement. La satisfaction du besoin collectif de stocks détermine le passage d'une situation de report à une situation de déport.

L'hypothèse selon laquelle l'évolution de la base reflète celle du besoin collectif de stocks est testée à court terme : sur une courte période, il y a peu de chances que ce besoin évolue, à moins que des opérations décisives de rationalisation de la production ne soient mises en place. Les tests empiriques réalisés sur les marchés pétroliers de 1991 à 1996 confirment l'hypothèse de Long : sur cet intervalle de temps, la base s'inverse toujours au même niveau de stocks sur les marchés du pétrole brut, de l'essence, et du fioul. Les besoins collectifs sont, pour chacun de ces marchés, respectivement de 24, 29 et 37 jours de consommation.

L'interprétation de Long n'est cependant pas associée à une analyse de la relation entre prix au comptant anticipé et prix à terme. L'auteur suppose implicitement que ces deux prix sont identiques. Or, c'est uniquement si cette seconde hypothèse est vérifiée que le niveau de stocks auquel la base s'inverse peut être analysé comme celui dont l'industrie a collectivement besoin. Si, à l'inverse, la théorie du déport normal se vérifiait dans le marché pétrolier, le besoin collectif de stocks correspondrait au stock détenu en situation de déport normal. Les résultats de Long permettent donc de constater la stabilité de la relation entre base et niveau de stocks autour d'un niveau de stocks donné, mais pas de définir le besoin collectif de stocks de l'industrie pétrolière.

### **3.3.2.b. Le *convenience yield* sur les marchés du pétrole brut et des produits raffinés**

Artus et Kaabi (1991) testent sur les marchés pétroliers la relation fondamentale de la théorie du stockage, selon laquelle le *convenience yield* est élevé lorsque le niveau de stock est faible, puis diminue au fur et à mesure que le niveau des stocks augmente. Les tests sont réalisés sur une période s'étendant de 1983 à 1991, sur les marchés du brut (NYMEX), et d'un produit raffiné (contrat fioul n°2). La relation entre prix à terme et prix au comptant est analysée sur deux échéances rapprochées : un et trois mois. Les données de stocks employées sont agrégées : elles correspondent aux stocks des huit principaux pays de l'OCDE. Ces données sont

considérées comme une représentation satisfaisante des données de stocks mondiaux : dans le marché pétrolier, les stocks sont en effet en majorité détenus au niveau des pays consommateurs, le transport de produits pétroliers étant beaucoup plus coûteux que celui de pétrole brut.

L'étude permet de conclure que sur le marché du pétrole brut comme sur celui du fioul, le *convenience yield* est une fonction décroissante du niveau des stocks. Par contre, il évolue de façon inverse sur les deux marchés : lorsque la détention de pétrole brut est rentable, celle de produits ne l'est pas. Artus et Kaabi interprètent ce résultat comme le reflet des fluctuations des opérations de raffinage : après une période de production intense, les stocks de pétrole brut sont faibles et ceux des produits raffinés élevés ; le *convenience yield* du pétrole brut est donc inversement corrélé à ceux du fioul domestique et de l'essence.

### **3.3.2.c. L'offre de stockage dans les marchés du pétrole brut et des produits pétroliers**

Cho et Mc Dougall (1990) testent la validité de la théorie du stockage de façon directe et indirecte, sur les marchés à terme américains du pétrole brut, du fioul et de l'essence, de janvier 1985 à mai 1989. Les tests directs analysent la relation entre le niveau des stocks et le *convenience yield* à travers le comportement de la base. Les tests indirects sont réalisés dans le prolongement des travaux de Fama et French (1987, 1988). Cho et Mc Dougall comparent la variation relative des prix au comptant et des prix à terme lorsque la base est positive et lorsqu'elle est négative. Dans le premier cas, la volatilité des prix au comptant doit être équivalente à celle des prix à terme. Dans le second, le faible niveau des stocks doit générer une volatilité des prix au comptant supérieure à celle des prix à terme.

Les tests directs sont réalisés à partir des stocks domestiques américains, au moyen d'une régression de la base sur le niveau des stocks. Les résultats confirment la théorie du stockage pour les trois marchés pétroliers : la base est fortement corrélée au niveau des stocks, en particulier sur le marché de l'essence.

Les tests indirects sont réalisés en deux temps : les auteurs commencent par tester l'hypothèse selon laquelle la variabilité des prix au comptant est supérieure à celle des prix à terme lorsque la base est négative. Cette hypothèse est vérifiée sur les deux marchés des produits raffinés mais pas sur celui du pétrole brut. Un test équivalent, quoique moins sélectif, est alors réalisé pour vérifier si la variabilité de la base, et non plus celle des prix au comptant, est supérieure lorsque celle-ci est négative. Il s'avère concluant pour les trois marchés.

Plusieurs éléments peuvent expliquer, selon Cho et Mc Dougall, pourquoi la théorie du stockage est moins bien validée sur le marché du pétrole brut. En premier lieu, les auteurs remettent en question la représentativité des données de prix utilisées : le WTI constitue une faible proportion de l'offre totale de pétrole brut ; les prix à terme du marché américain sont ponctuellement affectés par des perturbations dues à des dysfonctionnements du système de distribution du pétrole brut américain (phénomène du « *Cushing cushion* ») ; ensuite, le marché du pétrole brut n'est pas aussi concurrentiel que celui des produits raffinés, la production étant soumise à des quotas dans les pays membres de l'OPEP.

### 3.3.3. Conclusion

Les études réalisées sur le marché pétrolier confirment globalement la validité de la théorie du stockage. Pour ce marché comme pour ceux précédemment analysés, toutes les études recensées considèrent cependant l'existence du *convenience yield* comme un fait établi. Des études plus précises de la relation entre prix et stocks peuvent conduire à rejeter l'observation, jusqu'à présent admise, selon laquelle des stocks sont détenus en situation de déport. La notion même de *convenience yield* est alors remise en question.

## SECTION 4. CRITIQUES DE LA THEORIE DU STOCKAGE

Les critiques adressées à la théorie du stockage sont de deux types : elles portent en premier lieu sur la variabilité des résultats empiriques obtenus en fonction des données de stocks employées (4.1). La théorie du stockage se contente en effet de définir une relation entre base et niveau de stocks, sans préciser quelle catégorie de stocks doit être prise en considération. Plus fondamentalement, certains auteurs remettent en question la validité du concept central de la théorie du stockage : le *convenience yield* (4.2).

### 4.1. CONVENIENCE YIELD ET NATURE DES STOCKS

Diverses études empiriques ont montré que le *convenience yield* associé à un stock dépendait de sa nature (4.1.1), et de la disponibilité des stocks (4.1.2). Ces différents constats ont récemment conduit à l'apparition d'explications alternatives de la relation entre prix à terme et prix au comptant (4.2).

#### 4.1.1. Nature des stocks

Telser (1958) est le premier à souligner le fait que le *convenience yield* associé aux stocks est différent en fonction de la nature des stocks considérés. Son étude porte sur les stocks gouvernementaux. Telser formule l'hypothèse selon laquelle le *convenience yield* lié à ces stocks est positif et vient s'ajouter au *convenience yield* marginal des stocks privés ; l'insertion des stocks gouvernementaux dans l'analyse doit avoir un impact négatif sur le niveau de la base. Il teste ensuite cette hypothèse au moyen d'une régression de la base sur les différentes variables explicatives de la relation entre prix à terme et prix au comptant identifiées, en distinguant stocks publics et stocks privés.

Les résultats de l'étude empirique confirment l'hypothèse de Telser : le *convenience yield* associé aux stocks gouvernementaux est positif, mais inférieur à celui des stocks détenus par des opérateurs privés. L'effet sur les prix de stocks

gouvernementaux est donc différent de celui qu'aurait un volume identique de stocks privés. L'auteur interprète ce résultat comme le reflet d'une différence de disponibilité des stocks : les stocks privés et les stocks gouvernementaux ne sont pas utilisés de la même façon. Les premiers sont employés à des fins industrielles et commerciales, alors que les seconds sont constitués en vue d'une éventuelle action régulatrice sur les prix. De plus, ils peuvent être de moindre qualité que les stocks privés ; enfin, ils sont parfois entreposés dans des régions éloignées des centres de consommation. Pour ces différentes raisons, le *convenience yield* qui leur est associé est inférieur.

En analysant le *convenience yield* des stocks gouvernementaux, Telser discerne trois éléments fondamentaux pour la définition des stocks, qui sont analysés de façon plus approfondie par Thompson (1986) : leur disponibilité, leur qualité, et leur localisation.

#### 4.1.2. *Segmentation du marché et agrégation des données*

Thompson analyse les rendements du stockage sur les marchés à terme du café et du cacao, en testant deux hypothèses. La première est que le marché du café est plus segmenté que celui du cacao. Cette différence doit se traduire de la façon suivante : les prix à terme du cacao doivent refléter l'évolution des stocks mondiaux, et ceux du café uniquement l'évolution d'un sous-ensemble des stocks mondiaux. En d'autres termes, seul un sous-ensemble des stocks mondiaux du café serait disponible immédiatement pour la commercialisation ou la transformation, deux facteurs étant responsables de ce phénomène : la localisation des stocks et la structure de l'offre et de la demande pour ce marché. Alors que la majorité des stocks de cacao est détenue par les pays importateurs, une grande partie des stocks de café est conservée dans les pays producteurs et peut être volontairement retirée du marché dans le but de soutenir les prix. La différence de localisation des stocks entre les deux marchés traduit une différence de disponibilité. De plus, parmi les stocks de café destinés à la vente sur le marché libre, seule une partie serait utilisable pour les opérations

d'arbitrage : les différentiels de qualité sont en effet plus importants dans le marché du café que dans le marché du cacao.

Seconde hypothèse : sur les marchés à terme du café, les rendements du stockage seraient plus variables que sur ceux du cacao. La variabilité des rendements du stockage peut être liée à l'étroitesse du marché ou à sa fragmentation ; elle serait supérieure dans le cas du café pour deux raisons : le marché du café est fréquemment soumis à des manipulations de la part des producteurs. De plus, l'arbitrage serait imparfait entre les différentes qualités de café. De ce fait, les rendements du stockage ne refléteraient pas la disponibilité des stocks en général, et pourraient ne pas toujours refléter la disponibilité du même sous-ensemble de stocks.

Les tests empiriques confirment assez largement les hypothèses avancées par Thompson : la différence entre prix à terme et prix au comptant sur les marchés du cacao de New-York et de Londres reflète relativement bien l'évolution des stocks mondiaux pour ce marché. Les bases constatées sur les marchés à terme de New-York et de Londres n'évoluent cependant pas de façon parfaitement corrélée, ce qui laisse supposer que les variations de l'offre et de la demande locales ont un impact sur les prix à terme de chaque marché, et que la base sur un marché est plus corrélée avec les stocks locaux qu'elle ne l'est avec les stocks mondiaux. Les données statistiques pour les stocks de cacao étant agrégées, il est impossible de s'assurer de la pertinence de cette interprétation. Les données disponibles ne sont pas suffisamment précises pour analyser correctement la relation entre prix à terme et prix au comptant. Thompson se heurte ici à une difficulté pratique dont les implications théoriques seront analysées par Williams et Wright en 1989 (4.2).

Les résultats obtenus sur le marché du café sont plus difficiles à interpréter. De toute évidence, la base sur le marché à terme de New-York n'est pas fortement corrélée aux stocks mondiaux de café. Elle l'est avec le niveau des stocks du marché américain, ce qui traduit l'étroitesse du marché du café : ces stocks ne représentent en effet qu'une faible proportion des stocks mondiaux. Les stocks détenus par les producteurs peuvent être considérés comme « extérieurs » au marché au comptant.

Enfin, les rendements du stockage sur le marché du café varient beaucoup plus que ceux du cacao. Il est parfois même impossible, à certaines périodes, de

mettre en évidence l'existence d'une courbe d'offre de stockage : de nombreuses régressions entre prix et stocks ne sont pas significatives statistiquement. La théorie de l'offre de stockage ne permet donc pas d'expliquer correctement le comportement des prix à terme du café. Thompson suppose que la raison de cette défaillance réside dans le caractère non concurrentiel du marché du café ; il envisage cependant également la possibilité que le marché soit compétitif, mais que les opérateurs ne soient pas correctement informés de la disponibilité des stocks.

## 4.2. LES COUTS DE TRANSFORMATION

La mise en évidence de l'influence du choix des données de stocks sur les résultats des tests empiriques conduit à une remise en question de la théorie du stockage. La théorie des coûts de transformation (4.2.2), élaborée par Williams et Wright en 1989, est issue des travaux de Williams (1986) sur les motifs de détention des stocks (4.2.1).

### 4.2.1. *Les motifs de détention des stocks*

L'analyse de Williams est menée à partir d'un parallèle entre la théorie du stockage et la théorie de la demande de monnaie. L'objectif de cette dernière est d'expliquer les raisons pour lesquelles un agent économique détient plus de monnaie qu'il n'en a besoin pour assurer ses paiements courants et renonce ainsi à une rémunération sur sa monnaie excédentaire.

La monnaie est l'actif financier le plus liquide : elle assure la réalisation de transactions immédiates ; par contre, sa détention n'est pas rémunérée. Pour gérer son patrimoine, un agent doit donc arbitrer entre la détention de monnaie, qui lui assure la possibilité de satisfaire sans délai ses désirs de consommation, et le placement de sa richesse dans des actifs moins liquides mais rémunérés. Lorsqu'il ne détient pas suffisamment de monnaie, l'agent doit attendre la transformation d'une partie de ses actifs moins liquides en monnaie. Il subit dans ce cas des coûts de transformation.



De la même façon que la détention de monnaie assure la possibilité de réaliser des transactions immédiatement, la détention de stocks permet de les vendre ou de les employer sur le champ : elle garantit l'accès à la marchandise. Les coûts de transformation des stocks sont vraisemblablement plus importants que leur équivalent pour la monnaie : ils correspondent au coût de transformation (*processing*), de transport et de négociation de la marchandise. La détention de commodités permet donc à une firme de ne pas subir les contraintes liées au processus de transformation de la marchandise. L'incertitude et les délais imposés par la technologie sont des raisons suffisantes pour stocker des matières premières et des produits finis à un coût d'opportunité apparent.

Pour Williams, le motif de précaution, lié à l'existence de coûts de transformation, explique la détention de stocks en situation de déport. Cette notion de coûts de transformation permet à Williams et Wright d'élaborer une théorie de la relation entre prix au comptant et prix à terme.

#### 4.2.2. La théorie des coûts de transformation

Williams et Wright (1989) rassemblent les questions de la disponibilité, de la localisation et de la qualité des stocks en un problème unique : celui de la transformation d'une commodité en son substitut proche. Selon les auteurs, l'agrégation de données de stocks en réalité hétérogènes, qu'elle soit volontaire ou subie, est en grande partie responsable de l'observation de stocks lorsque la base est inférieure aux coûts de stockage purs.

Pour Williams et Wright, la théorie du stockage est insuffisante à deux niveaux : en premier lieu, le *convenience yield* n'a jamais fait l'objet d'une analyse théorique approfondie ; seule sa plausibilité a été montrée à partir de brefs exemples fondés sur le comportement du transformateur individuel ; ensuite, de nombreuses études du *convenience yield*, réalisées pour expliquer la relation entre prix et stocks pour une commodité donnée, englobent en réalité, implicitement, plusieurs commodités reliées entre elles.

Pour une même commodité, on peut distinguer plusieurs sous-agrégats de stocks économiquement distincts et reliés entre eux par des coûts de transformation.

Ces coûts peuvent être des coûts de transport, de transformation proprement dite, ou de commercialisation. Le processus de transformation d'un sous-agrégat en un autre peut être réversible, ou non<sup>36</sup>. C'est lorsque ces sous-agrégats sont suffisamment substituables pour être réunis en une donnée statistique unique, mais sont cependant séparés par des coûts de transformation variables dans le temps, qu'il peut sembler exister un *convenience yield* associé à la détention de stocks.

Williams et Wright formalisent leur proposition de la façon suivante : soient deux commodités A et B, substituables à un coût de transformation près. Le problème du transformateur consiste à allouer, à chaque période, les stocks de chaque commodité à la commercialisation, au stockage, ou à la transformation (*processing*). Les coûts de transformation relient les prix contemporains de A et de B. Soient une situation d'abondance de stocks pour la commodité A et simultanément, une situation de pénurie de stocks pour la commodité B. Les prix de B sont en déport. Si ces prix sont attribués non pas à B, mais à la commodité agrégée (A+B), le niveau des stocks observés en situation de déport est plus élevé qu'il ne le serait si seul les stocks de la commodité B étaient pris en considération. A travers le phénomène d'agrégation des données de stocks, les auteurs identifient ainsi une première raison expliquant l'observation de la détention de stocks en situation de déport.

Les auteurs expliquent ensuite pourquoi les stocks de A ne sont pas transformés en commodité B, ce qui aurait pour effet de mettre un terme à la situation de déport pour B. Une prime étant offerte pour la livraison immédiate de B, il serait en effet logique, puisque A est excédentaire, de le transformer en B pour bénéficier de cette prime. Cette opération de transformation n'est cependant réalisée que sous certaines conditions : en premier lieu, pour que A soit transformé en B, il faut que la prime offerte soit supérieure au coût de transformation de A en B. A cette première condition, il faut ajouter la réunion de deux autres : d'une part, le coût marginal courant de transformation de A en B doit être inférieur au coût marginal de

---

<sup>36</sup> Il est possible par exemple de transporter plusieurs fois un même stock de blé d'un lieu à l'autre, mais un stock de blé ne peut être reconstitué à partir d'un stock de farine.

transformation de A en B anticipé pour la prochaine période ; d'autre part l'opérateur doit anticiper que la situation d'abondance pour A et de pénurie pour B se maintiendra au cours de la prochaine période. Dans le cas inverse il est plus rentable de stocker A, même si les prix de B sont en déport. Le fait que les coûts de transformation d'une commodité en une autre et les anticipations sur le niveau des prix futurs soient variables dans le temps est la seconde raison expliquant la détention de stocks en situation de déport.

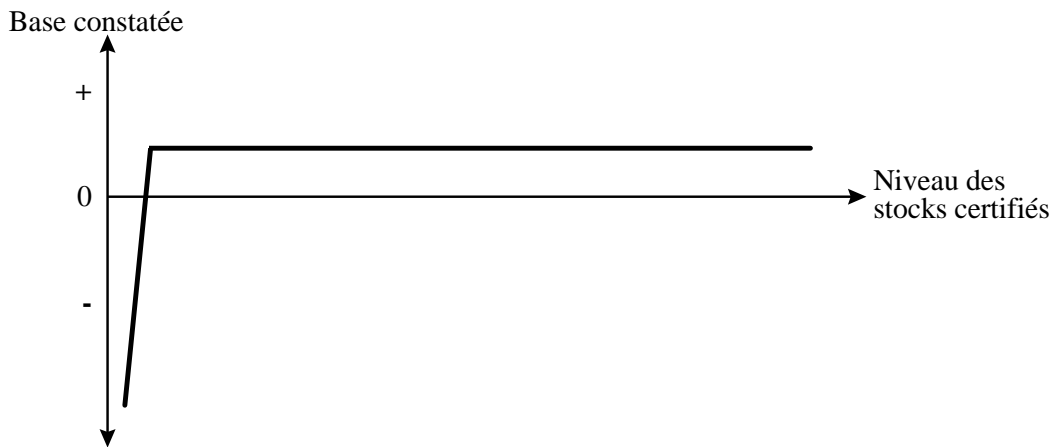
Les auteurs citent plusieurs circonstances pouvant conduire à l'apparition de coûts de transformation anticipés différents des coûts de transformation courants : le coût d'une opération de transformation peut varier en fonction de la technologie utilisée (le fret maritime, par exemple, est moins onéreux que le fret aérien) ; de plus le coût d'une opération de transformation utilisant une technologie donnée peut dépendre du volume de commodité transformé par unité de temps (le transport d'une tonne de pétrole brut est moins coûteux lorsque les capacités d'un bateau sont totalement employées que lorsque qu'elles ne le sont pas).

Les deux auteurs illustrent leur propos à partir du cas du marché du café, déjà examiné par Thompson. En employant les données de stocks américains, les auteurs aboutissent à une courbe d'offre de stockage dont la forme est proche de celle obtenue par Working<sup>37</sup> : les tests empiriques permettent de constater la présence de stocks en situation de déport. En revanche, lorsque des données de stocks certifiés par l'échange<sup>38</sup> sont employées, la forme de la courbe d'offre de stockage est modifiée. Elle devient une courbe en L renversé : le niveau des stocks détenus en situation de déport est bien inférieur à celui observé dans le premier cas. L'appréciation du niveau de stocks détenus en situation de déport dépend donc fortement des données utilisées.

---

<sup>37</sup> Figure 2.2.

<sup>38</sup> Les stocks certifiés par l'échange sont d'une qualité correspondant exactement à celle exigée lorsqu'à l'échéance d'un contrat à terme, la livraison physique est demandée. Ils représentent un sous-ensemble des stocks de café détenus sur l'ensemble du territoire américain.

**Figure 2.6 : Courbe d'offre de stockage pour les stocks de café certifiés**

L'analyse des coûts de transformation et les tests empiriques réalisés conduisent ainsi les auteurs à conclure que si des stocks sont détenus en situation de déport, c'est parce que l'étude des possibilités d'allocation géographique et temporelle de ces stocks conduit les opérateurs à les conserver.

L'analyse de Williams et Wright ne permet pas de remettre totalement en cause l'existence du *convenience yield*. Ce dernier peut être défini, en se référant à la théorie exposée par les auteurs, comme l'avantage procuré par la détention de stocks pour des opérateurs recherchant la minimisation de leurs coûts de transformation, compte tenu de leurs anticipations et des délais de transformation de la commodité. En revanche, Williams et Wright démontrent que le *convenience yield*, défini comme le bénéfice associé à la détention de stocks, est surestimé lors de l'analyse de la relation entre prix et stocks, du fait de l'agrégation des données qui conduit à négliger les questions de disponibilité, de localisation, de différentiel de qualité des stocks, ainsi que l'existence de coûts de transformation des stocks. Ils ne précisent pas cependant où s'arrête, en pratique, le phénomène d'agrégation des données. Par conséquent, leur étude ne permet pas de comprendre si le fait que le niveau des stocks certifiés de café ne soit pas totalement nul en situation de déport est dû aux données utilisées, qui dans cette hypothèse rassembleraient elles-mêmes des sous-agrégats économiquement distincts, ou si elle est due à la présence d'un *convenience yield* associé à la détention de ces stocks.

## SECTION 5. CONCLUSION

La théorie du stockage explique la relation entre prix au comptant et prix à terme dans un marché de commodités par la présence de stocks ou, plus précisément, par l'analyse des motifs de détention de ces stocks. Une grande partie des travaux réalisés dans ce cadre théorique a pour objectif de comprendre la détention de stocks en situation de déport.

Les différentes explications recensées dans ce chapitre peuvent être synthétisées de la façon suivante : la détention de stocks en situation de déport est expliquée par deux éléments, l'incertitude affectant l'offre et la demande de commodités, et la rigidité des activités industrielles et commerciales dans lesquelles les commodités sont impliquées. Cette rigidité se manifeste par une incapacité à adapter rapidement l'offre à une variation de la demande. Elle peut être liée à la présence de coûts fixes élevés dans les activités de transport, de stockage, de production et de transformation de la commodité, et/ou à la distance séparant les lieux de production et de consommation de la commodité. Incertitude et rigidité agissent le plus souvent de façon conjointe.

A partir de cette interprétation, il est possible de retrouver les différentes explications de la détention de stocks en situation de déport étudiées dans ce chapitre. Selon Kaldor (1939) la détention de stocks en situation de déport permet de répondre à la demande sans supporter de délais de livraison. Brennan (1958) complète cette analyse : pour lui, les stocks sont détenus parce qu'ils permettent de répondre à une demande imprévue sans supporter l'attente de l'approvisionnement. L'auteur permet de comprendre que l'éloignement des lieux de production et de consommation ne présente une contrainte que si la demande future est incertaine. Dans ce contexte, la rigidité des activités de transport, associée à l'incertitude concernant le niveau de la demande future, est une incitation à la détention de stocks en situation de déport.

Williams et Wright (1989) proposent une explication plus exhaustive encore : pour ces deux auteurs, face à l'incertitude affectant à la fois l'offre et la demande future, si les opérateurs détiennent des stocks en situation de déport, c'est parce que,

compte tenu des possibilités présentes et futures d'allocation de ces stocks, cela reste le meilleur moyen de minimiser leurs coûts de transformation. Ce que montrent les auteurs à travers la notion de coûts de transformation, c'est que l'offre de commodité est affectée d'une rigidité, liée soit à la présence de coûts fixes, soit à la distance géographique séparant les commodités stockées de leur lieu de transformation. L'association incertitude/rigidité permet là encore d'expliquer la détention de stocks en situation de déport.

D'autres auteurs analysent eux aussi la rigidité se manifestant par la présence de coûts fixes élevés dans l'activité industrielle et commerciale et son impact sur le comportement de stockage des opérateurs. Pour Working (1949), la détention de stocks en situation de déport est expliquée par la présence de coûts fixes élevés dans l'activité de stockage et par la nécessité d'assurer la continuité d'un processus de production. A travers la notion de rendement de réserve, Weymar (1968) invoque à son tour la présence de coûts fixes élevés dans les activités de production et de transformation.

Dans cette analyse, si des stocks sont détenus en situation de déport, c'est en réalité parce que les capacités de production, de stockage, de transport et de transformation ne sont pas adaptées au niveau de l'activité : il y a surcapacité. Cela peut s'expliquer soit par le caractère saisonnier des commodités, auquel cas la surcapacité n'est que momentanée, soit par une erreur d'appréciation du niveau d'activité lors de la construction des capacités. Cette prévision est d'autant plus délicate que l'offre et la demande sont fluctuantes et que le délai de constitution des capacités est important. Dans le premier cas invoqué, la rigidité des activités de production, de transformation et de stockage permet à elle seule de comprendre la détention de stocks en situation de déport. Dans le second cas, cette rigidité est associée à l'incertitude affectant le niveau de l'offre et de la demande futures.

Les opérations d'arbitrage entre marché physique et marché papier sont donc limitées en situation de déport par l'incertitude affectant l'offre et la demande de commodités, et par la rigidité des activités de transport, de transformation et de

commercialisation des marchandises<sup>39</sup>. De ce fait, la base a un comportement asymétrique : elle est plus volatile en situation de déport qu'en situation de report.

En recensant les différents motifs de détention des stocks évoqués ci-dessus, la relation entre prix au comptant et prix à terme dans un marché concurrentiel de commodité stockable peut être formulée de la façon suivante :

$$F(t,T) = S(t) + C_S(t,T) - [A_I(t) + C_R(t)]$$

Avec : -  $F(t,T)$  : prix à terme en  $t$  du contrat parvenant à échéance en  $T$ ,

-  $S(t)$  : prix au comptant en  $t$  de la commodité livrable sous contrat,

-  $C_S(t,T)$  : coût de stockage entre  $t$  et  $T$  (frais d'entreposage et frais financiers),

-  $A_I(t)$  : avantage présenté par la détention de stocks en situation d'incertitude,

-  $C_R(t)$  : coûts de la rigidité.

L'analyse des situations de report et de déport issue de cette relation est la suivante : le coût de stockage  $C_S(t,T)$  est une fonction croissante du niveau des stocks. En revanche, l'avantage  $A_I(t)$  que présente la détention de stocks compte tenu de l'incertitude affectant l'offre et la demande de commodité, et les coûts  $C_R(t)$  de la rigidité sont une fonction inverse du niveau des stocks. De plus, pour des commodités non saisonnières,  $A_I(t)$  et  $C_R(t)$  agissent toujours conjointement.

Lorsque le niveau des stocks est faible, une modification marginale de l'offre ou de la demande de commodité a un impact significatif sur les prix. Le fait de détenir des stocks permet de profiter d'une hausse imprévue de la demande et de supporter un retard imprévu dans l'approvisionnement. La variable  $A_I(t)$  est positive. De même, la rigidité des activités de transport, de transformation et de commercialisation des marchandises se manifeste d'autant plus fortement que le volume de stocks est faible : la variable  $C_R(t)$  est positive. A l'inverse, lorsque le niveau des stocks augmente,  $A_I(t)$  et  $C_R(t)$  tendent vers une valeur nulle.  $C_R(t)$  peut cependant redevenir positif si les capacités de stockage, de transformation ou de transport de la marchandise parviennent à saturation.

Les variables  $A_I(t)$  et  $C_R(t)$  étant toutes deux, dans presque tous les cas, une fonction inverse du niveau des stocks, elles peuvent être regroupées en une seule

---

<sup>39</sup> A ces deux éléments s'ajoutent enfin, en situation de déport comme en situation de report, la

variable,  $[A_I(t) + C_R(t)]$ . Cette variable, qui regroupe les différentes explications de la détention de stocks en situation de déport proposées dans la littérature, peut être appelée *convenience yield*. Cette définition servira de référence lors de l'élaboration d'un modèle de structure par terme des prix des commodités (chapitre quatre).

---

possibilité pour certains producteurs de réduire leur offre et l'existence de différentiels de qualité.



## CONCLUSION

La théorie du déport normal et la théorie du stockage peuvent être considérées comme complémentaires. Elles s'intéressent en effet à deux relations de prix différentes ; la théorie du déport normal est centrée sur l'étude de la relation entre prix à terme et prix au comptant anticipé, menée à partir de l'analyse des positions de couverture des opérateurs sur le marché à terme. La théorie du stockage examine les liens unissant prix au comptant et prix à terme à travers les coûts de stockage et les motifs de détention des stocks. Ainsi, une situation de report sur la base constatée peut tout à fait coïncider avec un déport sur la base anticipée.

Cette complémentarité n'implique cependant pas une convergence de points de vue. La théorie du déport normal et la théorie du stockage s'opposent en effet à deux niveaux : le rôle attribué aux marchés à terme et la place accordée à la prime de risque dans l'explication de la relation entre prix au comptant et prix à terme. Dans la théorie du déport normal, le rôle des marchés à terme est d'assurer le transfert de risque de prix entre les opérateurs. Dans la théorie du stockage en revanche, ces marchés permettent de faciliter les opérations d'achat et de vente des acteurs opérant sur le marché physique, leur donnant ainsi une plus grande liberté d'action.

Faut-il accorder la primauté à l'une de ces analyses ? Dans la théorie du déport normal, l'interprétation du rôle des marchés à terme repose sur le motif de création des marchés à terme : ces derniers servent à protéger les opérateurs contre les fluctuations des prix d'une commodité. Cependant, dès que ces marchés existent, l'information offerte par les prix à terme guide l'activité des opérateurs sur le marché physique. Comme le souligne la théorie du stockage, elle leur permet de mieux gérer leurs approvisionnements. Ces deux fonctions de transfert de risque de prix et « d'intermédiation » des marchés à terme coexistent donc vraisemblablement, sans

que l'une domine nécessairement l'autre, bien que seule la nécessité de couvrir le risque lié aux fluctuations des prix autorise l'apparition de la seconde.

Ces deux théories se distinguent également l'une de l'autre par la place accordée au risque dans l'analyse. Dans le cadre de la théorie du déport normal, il existe une prime de risque associée au prix au comptant anticipé. Le prix à terme est un estimateur biaisé du prix au comptant futur, ce biais étant représenté par la prime de risque que les opérateurs du marché physique sont prêts à payer aux spéculateurs pour ne pas subir de risque de prix. Dans le cadre de la théorie du stockage, la prime de risque associée au prix au comptant anticipé est supposée nulle. En revanche, l'activité de stockage est considérée comme risquée : de ce fait, une prime de risque associée à la détention de stocks est identifiée. Cette prime de risque peut constituer une variable distincte, ou bien être incluse dans le *convenience yield*.

Sachant que dans le cadre de la théorie du stockage l'évolution du prix au comptant, tout comme celle du *convenience yield*, dépend des stocks, la distinction entre prime de risque associée au prix au comptant anticipé et prime de risque associée à la détention de stocks ne semble pas, *a priori*, évidente : s'il existe une prime de risque associée aux stocks, c'est parce que le prix au comptant anticipé, dont le niveau détermine la valeur de ces stocks, fluctue. La prime de risque attribuée à la détention de stocks ne découle-t-elle donc pas de celle associée au prix au comptant ? Les modèles de structure par terme des prix des commodités, présentés en seconde partie de cette thèse, permettent d'apporter une réponse à cette question.

## ***SECONDE PARTIE :***

### ***LES MODÈLES DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX DES COMMODITÉS***

## INTRODUCTION

La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'étude des modèles de structure par terme des prix des commodités. Ceux-ci permettent d'analyser la structure par terme des prix dans son ensemble et non plus, comme c'est le cas avec les théories traditionnelles des prix des commodités, de s'intéresser aux seuls déterminants de la base. Ces modèles sont inspirés de ceux développés dans le domaine obligataire, eux-mêmes issus des méthodes de valorisation relative développées à l'origine pour les options<sup>1</sup>.

Dans le cadre d'un modèle de structure par terme des prix des commodités, un contrat à terme est considéré comme un actif dont les mouvements de prix incertains sont totalement spécifiés par un ensemble de facteurs, qualifiés de « facteurs sous-jacents » : ces facteurs représentent les sources d'incertitude affectant l'évolution du prix du contrat à terme. Ils constituent les variables d'état des modèles. Lorsque le modèle considéré est un modèle d'équilibre partiel - c'est le cas de ceux étudiés dans cette thèse - les variables d'état sont des variables exogènes, dont la dynamique est posée *a priori*.

Le chapitre trois, consacré à une revue de la littérature portant sur les principaux modèles de structure par terme des prix des commodités développés à ce jour, permet de montrer que ces variables d'état sont choisies en utilisant les facteurs explicatifs de la base présentés en première partie de cette thèse. Plus généralement, l'objectif du chapitre trois est d'étudier le lien unissant les théories traditionnelles des prix des commodités et les modèles de structure par terme des prix.

Cette revue de la littérature conduit enfin à la présentation de trois modèles de structure par terme des prix des commodités (chapitre quatre). Parmi ces trois

---

<sup>1</sup> Les méthodes de valorisation relative et les modèles de structure par terme des taux d'intérêt sont présentés en annexe deux.

modèles, deux constituent, à ce jour, une référence : le modèle développé par Brennan et Schwartz en 1985, et le modèle proposé par Schwartz en 1997. Le troisième modèle, développé dans le cadre de cette thèse, est une extension de ce dernier. Il utilise l'analyse des opérations d'arbitrage présentée en première partie pour préciser, par rapport au modèle de Schwartz, la dynamique du *convenience yield*. Des simulations sont enfin réalisées à partir de ces trois modèles, afin de les comparer et d'analyser la sensibilité de chacun aux variations des paramètres et des variables d'état.

## **CHAPITRE 3 : LES MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX DES COMMODITES ; UNE REVUE DE LA LITTERATURE**

Les modèles stochastiques ont été pour la première fois appliqués aux marchés de commodités en 1985, par Brennan et Schwartz<sup>1</sup>. Depuis cette date, un nombre relativement restreint de travaux a été réalisé dans ce domaine. Ce chapitre a pour objet de les présenter, afin de mettre en évidence les progrès qu'ils ont pu apporter dans la compréhension des relations de prix dans les marchés de commodités et de comparer les performances respectives des principaux modèles développés à ce jour.

Pour analyser la structure par terme des prix dans son ensemble, la formulation initiale des théories traditionnelles des prix des commodités doivent être adaptées. La première section de ce chapitre présente les conditions et les limites de cette extension.

En 2000, les modèles stochastiques développés dans le domaine des commodités sont presque tous des modèles d'équilibre partiel : les facteurs sous-jacents déterminant l'évolution du prix à terme sont des variables exogènes, dont le choix est en grande partie fondé sur les enseignements apportés par les théories traditionnelles. Ces facteurs sous-jacents sont présentés en seconde section.

La troisième section permet de comparer les capacités des principaux modèles développés à ce jour en termes de représentation de la structure par terme des commodités et de prévision des prix à terme. La conclusion est présentée en section quatre.

---

<sup>1</sup>Brennan M.J., Schwartz E, 1985 : « Evaluating natural resource investments », *The Journal of Business*, vol. 58, n°2.

## ***SECTION 1. EXTENSION AU LONG TERME DE L'ANALYSE PROPOSEE PAR LES THEORIES TRADITIONNELLES***

Les principaux développements de la théorie du déport normal et de la théorie du stockage ont été réalisés entre 1930 et 1960, à une époque où l'horizon des transactions sur les marchés à terme de commodité ne s'étendait que rarement au-delà d'une année. L'analyse initiale de la relation entre prix à terme et prix au comptant proposée par les théories traditionnelles étant conçue à l'origine pour étudier les relations de prix pour un horizon de court terme, ces deux théories doivent être adaptées pour permettre une analyse à long terme.

### **1.1. LA THEORIE DU DEPORT NORMAL**

L'analyse de Keynes peut être étendue de manière relativement simple pour aborder l'analyse de la totalité de la courbe des prix. Dans ce contexte, l'existence simultanée de reports et de déports à différentes échéances de la courbe des prix peut être expliquée par un surplus d'offre ou de demande de contrats émanant de certaines catégories d'opérateurs positionnés sur des échéances spécifiques. Pour pallier ces déséquilibres, une prime de risque est offerte aux spéculateurs acceptant de prendre sur le marché à terme une position inverse à la position nette des autres opérateurs. Comme dans le cadre de la théorie de l'habitat préféré développée dans le domaine des taux d'intérêt, la structure par terme des prix est alors analysée comme une succession de segments de maturités différentes. Les acteurs prennent des positions sur un ou plusieurs de ces segments en fonction de leurs besoins économiques.

Formuler une telle interprétation revient à lever les hypothèses de Keynes relatives au sens et au niveau de la prime de risque. Dans cette analyse, il n'y a plus un mais plusieurs déséquilibres entre l'offre et la demande de contrats. Chaque segment de la courbe des prix étant supposé satisfaire un besoin économique spécifique, toutes les catégories d'opérateurs n'interviennent pas nécessairement sur toutes les échéances. Le montant de la prime que les opérateurs sont prêts à payer et le sens du déséquilibre entre offre et demande de contrats peut donc varier en

fonction du segment considéré : la prime de risque associée au prix au comptant, à un instant donné, est variable en fonction des échéances. De plus, pour rendre compte des déformations de la courbe des prix, cette prime doit être variable dans le temps, en fonction des anticipations des acteurs concernant l'évolution du prix au comptant et de leur aversion au risque.

Si la théorie du déport normal peut être simplement adaptée à l'analyse de la totalité de la structure par terme des prix, l'élaboration de modèles stochastiques dans le cadre des marchés de commodités suppose cependant, comme le montre la troisième section de ce chapitre, de ne pas se référer uniquement à cette explication de la relation de prix, à moins de se satisfaire d'une représentation un peu sommaire de la structure par terme des prix des commodités.

## 1.2. LA THEORIE DU STOCKAGE

Alors que la théorie du déport normal est centrée sur l'analyse des positions de couverture sur le marché à terme et donc sur le transfert de risque entre les différents opérateurs du marché, la théorie du stockage propose une explication de la relation de prix fondée sur l'analyse des coûts de stockage des commodités. Plus précisément, les différents déterminants du prix à terme, dans ce contexte, sont le prix au comptant, le *convenience yield*, et le coût de stockage. Ce dernier inclut le coût pur de stockage, et les frais de financement de la marchandise.

Contrairement à la théorie du déport normal, la théorie du stockage prend dès l'origine en considération l'existence d'une structure par terme des déports et des reports dans l'analyse des relations entre prix au comptant et prix à terme : elle explique ce phénomène par le caractère saisonnier soit de l'offre, soit de la demande de commodités (chapitre deux). La coexistence d'une situation de déport à court terme et de report pour des échéances plus éloignées est interprétée, dans le cas d'une commodité agricole par exemple, de la façon suivante : à la fin d'une année de récolte, les stocks de commodité atteignent leur niveau le plus bas. Les prix à terme pour une livraison avant et après la prochaine récolte reflètent alors deux situations différentes : le marché est en situation de pénurie pour les livraisons prévues avant la



récolte, et les prix pour ces échéances sont en déport. Simultanément, ils sont en report pour les échéances de livraison prévues après la récolte.

La théorie du stockage semble *a priori* se prêter aisément à une analyse intertemporelle de la relation de prix. Cependant, lorsque l'échéance des contrats à terme s'éloigne au-delà de un ou deux cycles de production, un certain nombre de questions surgit : pour une commodité stockable, les coûts de stockage et le bénéfice apporté par la détention de stocks doivent-ils toujours être considérés comme les éléments déterminants de la relation entre prix à terme ? Les situations de pénuries de marchandise ne sont-elles pas nécessairement accidentelles et imprévisibles lorsque l'horizon d'analyse augmente ? A long terme, d'autres facteurs que les coûts de stockage peuvent-ils être invoqués pour expliquer l'allure de la structure par terme des prix ?

Gabillon (1995) présente une interprétation de la forme de la courbe des prix du pétrole brut qui apporte une réponse à certaines de ces questions, tout en associant l'une à l'autre théorie du déport normal et théorie du stockage. L'auteur propose de séparer la structure par terme des prix en deux segments distincts, permettant chacun de satisfaire un besoin économique déterminé. Dans ce contexte, le premier segment de la courbe des prix, correspondant aux échéances inférieures à 18 mois, sert principalement aux opérations de couverture. La production, la consommation, le niveau des stocks et la crainte de ruptures d'approvisionnement sont alors les éléments déterminants de la relation de prix. A plus long terme, les facteurs explicatifs de cette relation changent : ce sont les taux d'intérêt, l'inflation anticipée, et le prix des énergies concurrentes qui déterminent les prix à terme. Dans ce cas, l'information contenue dans les prix est utilisée pour réaliser des opérations d'investissement ou de financement de projet.

### 1.3. CONCLUSION

L'utilisation de modèles stochastiques dans le cadre des marchés de commodités implique l'extension au long terme de l'analyse des relations de prix proposée par les théories traditionnelles. Dans le cas de la théorie du déport normal, cette extension est possible à condition de se dégager du cadre théorique keynésien,

trop rigide. Cet élargissement de l'analyse est en revanche plus délicat lorsque le contexte théorique de référence est la théorie du stockage : il ne s'agit plus de lever des hypothèses simplificatrices mais de proposer de nouveaux éléments explicatifs de la relation de prix.

En 2000, les modèles de structure par terme des prix développés dans le cadre des marchés de commodités sont tous des modèles d'équilibre partiel. S'ils présentent l'avantage d'étendre le champ de l'analyse des relations de prix au long terme, ces modèles ne permettent cependant pas toujours de répondre aux questions théoriques que cette extension suscite. En revanche, ils apportent des éléments complémentaires de compréhension de la relation entre prix au comptant et prix à terme (seconde section de ce chapitre). Enfin, ils permettent d'envisager de nouvelles formes d'utilisation des marchés à terme.

## ***SECTION 2. LES VARIABLES D'ETAT DANS LES MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX DES COMMODITES***

Lors de l'élaboration de modèles d'équilibre partiel de structure par terme des prix des commodités, la théorie du déport normal et la théorie du stockage guident le choix des variables explicatives du prix à terme et la formulation des hypothèses relatives au comportement dynamique de ces variables. Quatre variables d'état sont utilisées dans les modèles stochastiques appliqués aux marchés de commodités : le prix au comptant (2.1), le prix à long terme (2.2), le *convenience yield* (2.3), et le taux d'intérêt (2.4).

### **2.1. LE PRIX AU COMPTANT**

Le prix à terme étant une représentation, compte tenu de l'information disponible à une date  $t$ , du prix au comptant futur, le prix au comptant peut être considéré comme le principal déterminant du prix à terme. Lorsqu'une seule variable explicative est retenue dans l'analyse de la structure par terme des prix, celle-ci est

donc toujours le prix au comptant (Brennan et Schwartz 1985, Gibson et Schwartz 1989, Brennan 1991, Gabillon 1991 et 1995, Schwartz 1997).

Cette variable présente l'inconvénient de ne pas être directement observable. Son introduction dans un modèle de structure par terme nécessite donc le choix d'une méthode de reconstitution de séries de données (2.1.1). Pour représenter le comportement dynamique du prix au comptant, deux types de formulations sont proposées (2.1.2) : le mouvement brownien géométrique, utilisé dans la majorité des cas, et le processus de retour vers une valeur moyenne. Enfin, le prix au comptant étant considéré comme une source d'incertitude affectant l'évolution du prix à terme, une prime de risque lui est associée (2.1.3).

### *2.1.1. Méthodes d'approximation du prix au comptant*

Dans la plupart des marchés de commodités, il n'existe pas de séries statistiques de prix au comptant : les marchés sont géographiquement dispersés, les échanges ne sont pas nécessairement très fréquents en un lieu donné, les termes de la transaction sont variables. Par conséquent, il est souvent impossible de constituer, à partir des informations disponibles, des séries de prix homogènes. Les statistiques portant sur ce type de transaction étant difficilement exploitables, le prix au comptant est très fréquemment identifié au prix à terme rapproché.

Schwartz (1997) utilise une autre méthode d'approximation du prix au comptant : le filtre de Kalman. Cette méthode économétrique, présentée au chapitre cinq, est adaptée à la reconstitution de séries de données non observables. En l'employant, l'auteur obtient des séries temporelles pour le prix au comptant et pour le *convenience yield*, qui sont, dans ses modèles, deux facteurs explicatifs du prix à terme.

Il montre que la reconstitution de séries de données de prix au comptant à l'aide d'une méthode telle que le filtre de Kalman est préférable à l'identification des prix au comptant aux prix à terme pour l'échéance la plus rapprochée : en premier lieu, ses études empiriques réalisées sur les marchés du pétrole brut, du cuivre et de l'or permettent de constater que les prix au comptant obtenus à partir du filtre de

Kalman, s'ils sont effectivement relativement proches des prix à terme rapprochés, ne leur sont cependant pas strictement identiques. De plus, la formulation de la dynamique du prix au comptant peut être influencée par l'utilisation de l'une ou de l'autre de ces méthodes (sous-section 2.1.2). Enfin, l'utilisation du filtre de Kalman permet d'améliorer les performances des modèles de structure par terme des prix.

### *2.1.2. Dynamique du prix au comptant*

La dynamique du prix au comptant est souvent représentée par un mouvement brownien géométrique dans les modèles de structure par terme des prix des commodités. Les travaux de Schwartz (1997) et les enseignements de la théorie du stockage permettent cependant d'accorder une préférence au processus de retour vers une valeur moyenne pour représenter l'évolution du prix au comptant dans le temps.

#### **2.1.2.a. Mouvement brownien géométrique**

Le mouvement brownien géométrique est généralement employé pour représenter le comportement dynamique des prix des actions. Il est également utilisé dans la majorité des modèles de structure par terme des prix des commodités (Brennan et Schwartz 1985, Gibson et Schwartz 1989 et 1990, Brennan 1991, Gabillon 1991 et 1995). L'évolution du prix au comptant dans le temps, lorsque celle-ci est définie par un mouvement brownien géométrique, peut être exprimée de la façon suivante :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_S dz_S$$

L'évolution du rendement du prix au comptant  $S$  est caractérisée par son espérance de rendement instantané  $\mu$ , et son écart-type instantané par unité de temps,  $\sigma_S$ .  $z_S$  est un mouvement brownien standard représentant les chocs aléatoires affectant l'évolution du prix  $S$ . Les paramètres de tendance  $\mu$  et de volatilité  $\sigma_S$  sont considérés comme constants. De plus, la tendance du prix au comptant est positive.

Lorsque le prix au comptant est identifié au prix à terme rapproché, les tests empiriques réalisés pour observer le comportement dynamique du prix au comptant<sup>2</sup> confirment le fait que le mouvement brownien est une représentation satisfaisante de ce comportement.

### 2.1.2.b. Processus de retour vers une valeur moyenne

Les travaux de Schwartz (1997) permettent de distinguer séries de prix au comptant et séries de prix à terme rapprochés. De plus, l'auteur montre qu'en utilisant une méthode économétrique adaptée à la reconstitution de variables non observables, le processus de retour vers une valeur moyenne, de type Ornstein-Uhlenbeck, se révèle adapté à la description du comportement dynamique du prix au comptant. L'évolution dans le temps de cette variable est alors exprimée de la façon suivante<sup>3</sup> :

$$\frac{dS}{S} = \kappa(\mu - \ln S)dt + \sigma_S dz_S$$

- Avec :
- $S$  : prix au comptant de la commodité,
  - $\kappa$  : force de rappel agissant sur le prix au comptant  $S$ ,
  - $\mu$  : moyenne à long terme du prix au comptant,
  - $\sigma_S$  : volatilité du prix au comptant,
  - $z_S$  : mouvement brownien standard.

Dans ce contexte, le prix au comptant fluctue aléatoirement autour de sa valeur moyenne  $\mu$ . La présence d'une force de rappel  $\kappa$  assure que la variable, lorsqu'elle s'en est éloignée, aura tendance à revenir vers sa valeur de long terme. Le prix au comptant est donc soumis à deux types d'influences : il a une propension à revenir vers une valeur moyenne, représentée par le premier terme de l'équation ci-dessus. Par ailleurs, des mouvements aléatoires peuvent simultanément l'éloigner de cette valeur.

Les tests empiriques, réalisés par Schwartz sur les marchés du pétrole brut et du cuivre en vue de tester la validité de cette représentation de la dynamique du prix

---

<sup>2</sup> Gibson et Schwartz, 1990.

<sup>3</sup> Ce modèle est inspiré de Ross, 1995.

au comptant, permettent d'obtenir les résultats suivants : pour les deux marchés de commodités étudiés, le coefficient représentant la force de rappel agissant sur le prix au comptant est fortement significatif sur le plan statistique. Ces résultats confirment la pertinence de l'emploi d'un processus de retour vers une valeur moyenne pour représenter le comportement dynamique du prix au comptant d'une commodité insérée dans un processus industriel. En revanche, ce processus se révèle inadapté à l'estimation des prix de métaux précieux tels que l'or<sup>4</sup>.

Au-delà des résultats des tests empiriques, la préférence accordée au processus de retour vers une valeur moyenne pour exprimer la dynamique du prix au comptant de commodités industrielles stockables peut être justifiée en se référant au comportement des opérateurs face aux fluctuations des prix : lorsque le prix au comptant est très inférieur à sa valeur moyenne à long terme, les opérateurs en position d'achat sur le marché physique (transformateurs et négociants) anticipent une hausse du prix au comptant et constituent des stocks, tandis que les producteurs réduisent, dans la mesure où leurs capacités de production le leur permettent, leur rythme de production. L'augmentation des achats sur le marché au comptant et la réduction simultanée de l'offre poussent le prix au comptant à la hausse. Inversement, lorsque le prix au comptant est supérieur à sa valeur moyenne à long terme, les transformateurs et les négociants anticipent une baisse des prix et tendent à se débarrasser de leurs stocks, tandis que les producteurs augmentent leur rythme de production. Ces opérations influencent à la baisse le prix au comptant.

Le processus de retour vers une valeur moyenne est donc mieux adapté à la représentation de l'évolution dynamique du prix d'une commodité que le mouvement brownien géométrique. En particulier, ce dernier ne permet pas de prendre en considération la façon dont les opérateurs réagissent aux évolutions du prix au comptant.

Le processus de retour vers une valeur moyenne n'est cependant pas exempt de désavantages : en premier lieu, il n'exclut pas l'apparition de valeurs négatives pour la variable d'état considérée. Cette caractéristique n'est pas moins gênante pour

---

<sup>4</sup> Ce phénomène est expliqué en détail en sous-section 2.3.

le prix d'une commodité que pour un taux d'intérêt<sup>5</sup>. D'autre part, les enseignements issus de la théorie du stockage permettent de remarquer qu'à l'aide de cette formalisation, il n'est pas possible de représenter de façon tout à fait satisfaisante le comportement dynamique du prix au comptant d'une commodité : en particulier, elle ne permet pas de prendre en considération l'asymétrie entre les situations de déport et de report, caractéristique des marchés de commodités.

### *2.1.3. La prime de risque associée au prix au comptant*

Dans les modèles de structure par terme de commodités, si le prix au comptant est intégré en tant que variable d'état, c'est parce qu'il est considéré comme une source d'incertitude affectant l'évolution du prix à terme. Une prime de risque lui est donc associée. Pour des raisons pratiques, lors de l'estimation des paramètres de ces modèles, cette prime est considérée comme constante. Ceci ne signifie cependant pas que, sur le plan théorique, l'existence d'une prime de risque variable soit niée.

La signification accordée à cette prime de risque varie selon les auteurs. Selon Gabillon (1995), la forme de la courbe des prix du pétrole brut, caractérisée par un déport à court terme et un report pour les échéances plus éloignées, est due à la présence d'un excédent de couverture courte pour les maturités rapprochées, et d'un excédent de couverture longue pour des échéances plus éloignées. A court terme, les positions courtes sur le marché à terme sont structurellement excédentaires, car la demande de couverture émanant des producteurs est supérieure à celle des transformateurs<sup>6</sup>. A long terme, le phénomène s'inverse : les prix sont en report, soit parce que le nombre d'acheteurs est supérieur au nombre de vendeurs sur le marché à terme, soit parce que l'aversion au risque des acheteurs est particulièrement élevée. Gabillon suppose ainsi implicitement que le sens de la prime

---

<sup>5</sup> La critique selon laquelle le processus de type Ornstein-Uhlenbeck autorise l'apparition de taux d'intérêt négatifs a également été formulée à l'encontre du modèle de Vasicek (1977). Pour pallier cet inconvénient, Cox, Ingersoll et Ross (1985) utilisent un processus de type racine carrée, dans lequel la volatilité du taux d'intérêt à court terme dépend du niveau de cette variable d'état.

<sup>6</sup> Cette caractéristique du marché pétrolier a été étudiée au premier chapitre.

de risque associée au prix au comptant, sur le marché du pétrole brut, varie en fonction de l'échéance considérée. Il ne vérifie cependant pas cette hypothèse.

Schwartz (1997) propose une analyse différente de la prime de risque associée au prix au comptant : pour cet auteur, la prime doit varier en fonction des différentes périodes du cycle économique et du niveau des stocks. Elle est supposée constante pour les besoins de l'estimation<sup>7</sup>. Sur les marchés du pétrole brut, de l'or et du cuivre, la prime de risque estimée est positive mais non significativement différente de zéro.

#### *2.1.4. Conclusion*

Sur le plan théorique, le processus de retour vers une valeur moyenne constitue une représentation de la dynamique du prix au comptant plus satisfaisante que le mouvement brownien géométrique. Le choix de ce processus suppose de reconstituer les séries de prix au comptant à l'aide d'une méthode adaptée au cas spécifique des variables non observables plutôt que d'identifier simplement le prix au comptant au prix à terme rapproché.

Le fait de choisir le prix au comptant comme variable d'état d'un modèle de structure par terme des prix introduit dans l'analyse une prime de risque associée à cette variable d'état. Les modèles étudiés étant dans leur grande majorité des modèles d'équilibre partiel, cette prime de risque est exogène, et sa signification dépend d'un choix théorique réalisé par les auteurs. Enfin, si la prise en considération de l'existence d'une prime de risque associée au prix au comptant semble conforter l'explication de la relation entre prix au comptant et prix à terme proposée par la théorie du déport normal, celle-ci est cependant à nouveau remise en question par les travaux empiriques réalisés par Schwartz (1997) sur les marchés du pétrole brut et du cuivre. Sur ces deux marchés en effet, la prime de risque associée au prix au comptant n'est pas significativement différente de zéro.



## 2.2. LE PRIX A LONG TERME

Gabillon (1991) utilise le prix au comptant et le prix à long terme comme variables d'état pour modéliser la structure par terme des prix du pétrole brut. Le prix à long terme correspond à un prix pour une échéance de livraison très éloignée. Le choix de cette seconde variable d'état distingue ce modèle à deux facteurs de tous les autres ayant été développés dans le domaine des commodités. Parmi les différentes variables d'état intégrées dans les modèles de structure par terme, celle-ci est la seule n'apparaissant pas dans les théories traditionnelles des prix des commodités<sup>8</sup>. Dans les autres cas, la seconde variable d'état introduite n'est pas le prix à long terme mais le *convenience yield*. Gabillon intègre celui-ci dans ses modèles, non pas comme une variable d'état exogène, mais comme une variable endogène dépendant du prix au comptant et du prix à long terme.

Le choix du prix à long terme comme seconde variable d'état résulte d'une étude du comportement de la structure par terme des prix du pétrole brut : les mouvements de la structure par terme des prix pour une échéance rapprochée sont en effet importants et erratiques, alors que les prix à long terme sont relativement stables. Les modifications de l'offre et de la demande sur le marché physique influencent considérablement le comportement des prix à terme rapprochés, et ont un également un impact sur les prix à terme pour des échéances plus éloignées, mais cet impact diminue au fur et à mesure que la maturité augmente. De plus, le prix à long terme peut être affecté par des événements exogènes au marché physique, tels qu'une évolution des taux d'intérêt, de l'inflation anticipée, ou des prix des énergies concurrentes. Ainsi, le prix au comptant et le prix à long terme doivent constituer un ensemble représentatif de facteurs permettant de décrire les mouvements de l'ensemble de la structure par terme des prix.

---

<sup>7</sup> L'étude de Schwartz est la seule, parmi les différents travaux recensés sur la structure par terme des prix des commodités, conduisant à une estimation de la prime de risque associée au prix au comptant.

<sup>8</sup> Dans le domaine des actifs obligataires, certains modèles utilisent comme variables d'état le taux d'intérêt à court terme et le taux d'intérêt à long terme. C'est le cas par exemple du modèle de Brennan et Schwartz (1979).

En l'absence d'un actif à très long terme échangé sur le marché, Gabillon a dû choisir une méthode d'approximation du prix à long terme (2.2.1). Le processus dynamique retenu pour représenter le comportement de cette variable est un mouvement brownien géométrique (2.2.2).

### *2.2.1. Méthode d'approximation du prix à long terme*

L'expression analytique du prix à long terme, dans le modèle de Gabillon, est une forme simplifiée de la solution analytique obtenue pour un prix à terme correspondant à une échéance quelconque. L'auteur reconstitue des séries de prix à long terme en extrapolant des structures par termes de prix quotidiennes. Les séries de prix à long terme estimées à partir de cette méthode présentent cependant des caractéristiques peu satisfaisantes au regard de la volatilité des prix à terme : le prix à long terme est en effet loin d'être stable. Sa volatilité annuelle estimée est deux fois moins élevée que celle du prix au comptant. Or, cette différence n'est pas suffisamment importante compte tenu de celles effectivement observées dans la réalité.

### *2.2.2. Dynamique du prix à long terme*

La dynamique choisie par Gabillon pour représenter le comportement du prix à long terme est, comme pour le prix au comptant, un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dL}{L} = \mu_L dt + \sigma_L dz_L$$

- Avec :
- $L$  : prix à long terme,
  - $\mu_L$  : tendance du prix à long terme,
  - $\sigma_L$  : volatilité du prix à long terme,
  - $z_L$  : mouvement brownien standard.

Les paramètres de cette dynamique sont supposés constants. De plus, le mouvement brownien standard du prix à long terme est corrélé à celui du prix au comptant :

$$E[dz_S \times dz_L] = \rho dt$$

Cette corrélation doit être positive : le prix à long terme augmente lorsque le prix au comptant augmente, et inversement. Si le prix à long terme est beaucoup moins volatil que le prix au comptant, cette corrélation doit de plus être faible. L'auteur obtient cependant une corrélation relativement élevée : 0,42. Ce résultat peu satisfaisant est vraisemblablement lié au fait que la méthode choisie par l'auteur pour reconstituer des séries de prix à long terme n'est pas optimale.

### 2.2.3. Conclusion

Le choix du prix à long terme comme seconde variable d'état peut surprendre : en effet, si comme le précise Gabillon lui-même, le prix à long terme est stable, pourquoi le considérer comme stochastique ?

L'auteur justifie ce choix par des tests empiriques : en comparant un modèle dans lequel le prix à long terme est stochastique et un modèle dans lequel il ne l'est pas, l'auteur montre que l'écart entre les prix à terme observés sur le marché et les prix à terme estimés est plus faible dans le premier cas.

Ce que montre ainsi Gabillon, c'est qu'un modèle à deux variables d'état est plus performant, en terme de représentation de la structure par terme des prix, qu'un modèle monofactoriel. Cependant, le choix du prix à long terme comme seconde variable d'état ne pourrait être pleinement justifié qu'en réalisant une comparaison avec d'autres modèles à deux facteurs. Cette comparaison seule permettrait de prouver que, comme l'auteur le suppose, le prix à long terme est une variable plus importante que le *convenience yield* pour représenter la structure par terme des prix d'une commodité.

## 2.3. LE *CONVENIENCE YIELD*

Dans tous les modèles de structure par terme des prix des commodités comprenant au moins deux variables d'état, exceptés ceux de Gabillon, le *convenience yield* est systématiquement la seconde variable d'état prise en considération pour expliquer l'évolution des prix à terme.

La définition retenue pour caractériser le *convenience yield* est invariablement celle proposée par Brennan et Schwartz, en 1985 (2.3.1). Cependant, si la définition du *convenience yield* fait l'objet d'un consensus pour les auteurs de modèles de structure par terme des prix, la façon de représenter le comportement dynamique de cette variable varie selon les modèles (2.3.2) : dans certains travaux (Gabillon, 1991, 1992, 1995 ; Brennan et Schwartz 1985) le *convenience yield* est exprimé en fonction d'autres variables d'état. Il est alors considéré soit comme constant, soit comme stochastique. Depuis le début des années 1990 cependant, en partie à la suite des travaux de Gibson et Schwartz (1989), le *convenience yield* intervient dans la grande majorité des cas en tant que seconde variable d'état. Sa dynamique est alors caractérisée par un processus stochastique autonome.

Enfin, l'étude de la structure par terme des prix des commodités soulève à nouveau la question du *convenience yield* associé à la détention de contrats *forward* et de contrats à terme (2.3.3).

### 2.3.1. Définition du *convenience yield*

La définition retenue à l'unanimité pour caractériser le *convenience yield* au sein des modèles de structure par terme des prix des commodités est la suivante<sup>9</sup> :

---

<sup>9</sup> Brennan M .J., Schwartz E.S., 1985 : « *The convenience yield is the flow of services that accrues to an owner of the physical commodity but not to the owner of a contract for future delivery of the commodity. [...] Recognizing the time lost and the costs incurred in transporting a commodity from one location to another, the convenience yield may be thought of as the value of being able to profit from temporary local shortages of the commodity through ownership of the physical commodity. The profit may arise either from local price variations or from the ability to maintain a production process as a result of ownership of an inventory of raw material.*

*« Le convenience yield est le flux de services dont bénéficie le détenteur de la commodité mais pas le détenteur d'un contrat prévoyant la livraison future de la commodité. [...] Compte tenu du temps perdu et des coûts engendrés par la transport de la commodité d'un lieu à l'autre, le convenience yield peut être considéré comme l'avantage, conféré par la possession de la commodité, d'être capable de tirer profit de pénuries locales et temporaires. Le profit peut provenir soit de variations de prix locales, soit de la capacité à maintenir un processus de production.*

*[...] La concurrence entre les détenteurs de stocks potentiels assure que le convenience yield net associé à l'unité marginale de stock sera identique pour tous les individus qui possèdent des stocks. Il est prévisible que ce convenience yield (net) marginal sera inversement proportionnel à la quantité de commodité stockée. »*

Cette définition est très proche de celle proposée par Brennan en 1958<sup>10</sup> : elle intègre en effet l'incertitude associée à la demande future de commodité et la concurrence entre les détenteurs de stocks pour expliquer le comportement du *convenience yield*. Elle inclut de plus la nécessité, pour les opérateurs du marché physique, d'assurer la continuité du processus de production. En cela, la définition du *convenience yield* employée en 1985 se rapproche de celle proposée en conclusion du chapitre deux, sans pour autant la rejoindre tout à fait. En effet, la définition de Brennan et Schwartz n'intègre pas explicitement l'incertitude associée à l'offre de commodité : compte tenu de la formulation adoptée par les auteurs<sup>11</sup>, il semble que seule l'incertitude associée à la demande future soit ici mise en cause.

Les modèles stochastiques considérés étant presque tous des modèles d'équilibre partiel, cette définition du *convenience yield* relève d'un choix théorique effectué par les auteurs.

---

*[...] Competition among potential storers will ensure that the net convenience yield of the marginal unit of inventory will be the same across all individuals who hold positive inventories. This marginal (net) convenience yield can be expected to be inversely proportional to the amount of the commodity held in inventory. »*

<sup>10</sup> Second chapitre, sous-section 3.1.

<sup>11</sup> « [...] The profit may arise either from local price variations [...] ».

### 2.3.2. Les différentes représentations du *convenience yield*

Dans les différents modèles de structure par terme des prix étudiés, le *convenience yield* est soit une variable endogène, fonction du prix au comptant ou du rapport (prix au comptant / prix à long terme), soit une variable d'état. Dans ce dernier cas, un processus de retour vers une valeur moyenne est employé pour représenter son comportement dynamique.

#### 2.3.2.a. Le *convenience yield* comme variable endogène fonction du prix au comptant

Dans le premier modèle de structure par terme des prix des commodités, développé par Brennan et Schwartz en 1985, le *convenience yield* est constant. Il est exprimé en fonction du prix au comptant, de la façon suivante :

$$C(S) = c \cdot S$$

où  $C$  est le *convenience yield*,  $S$  le prix au comptant. Ce modèle de Brennan et Schwartz est monofactoriel : la seule variable stochastique déterminant l'évolution du prix à terme est le prix au comptant. Les deux auteurs introduisent le *convenience yield* dans l'analyse pour prendre en considération le fait qu'une commodité, à la différence d'une obligation, participe à un processus industriel, et n'est donc pas détenue pour des raisons spéculatives. De plus, ils supposent que le *convenience yield* augmente avec le prix au comptant, ce qui est conforme aux prédictions de la théorie du stockage.

Les modèles stochastiques développés ultérieurement, en particulier ceux de Brennan (1991) et de Gibson et Schwartz (1989 et 1990) montrent cependant que cette formulation ne peut être considérée comme satisfaisante : si le *convenience yield* augmente effectivement avec le prix au comptant, il le fait certainement de façon aléatoire.

En 1991, Brennan, à partir de tests réalisés sur plusieurs marchés de commodités<sup>12</sup>, compare les performances de trois modèles monofactoriels à celles d'un modèle à deux facteurs. Les trois modèles monofactoriels expriment le *convenience yield* comme une variable endogène, fonction du prix au comptant ; dans le modèle à deux facteurs, le *convenience yield* devient une variable d'état.

Brennan reprend en premier lieu le modèle monofactoriel développé avec Schwartz en 1985. Le second modèle monofactoriel exprime le *convenience yield* comme une fonction non linéaire du prix au comptant :

$$C(S) = a + bS + cS^2$$

Cette formule est choisie pour sa plus grande flexibilité par rapport à celle utilisée en 1985. Une troisième version souligne le fait que le *convenience yield* net d'une commodité est borné à la baisse par l'opposé du coût de stockage. Ce coût est supposé constant pour une large fourchette de niveaux de stocks. Enfin, cette formule respecte le principe selon lequel le niveau du *convenience yield* augmente avec le prix au comptant :

$$C(S) = \max(a, b + cS)$$

L'auteur compare les résultats obtenus à l'aide de ces trois modèles monofactoriels pour différentes commodités : ces derniers ne conduisent pas à des résultats significativement différents les uns des autres. Par contre, leur application à différents marchés permet de réaliser des comparaisons entre diverses catégories de commodités. Ainsi, les valeurs estimées pour le *convenience yield* des métaux précieux sont systématiquement négatives et proches de zéro ; en revanche, elles sont toutes positives pour les commodités commerciales. De plus, la capacité des modèles monofactoriels à prédire les prix futurs est relativement satisfaisante pour les métaux précieux : l'écart-type des prix estimés représente, pour l'or et le platine, environ 3% du prix moyen ; par contre, il est nettement plus important pour les commodités commerciales : il varie en effet entre 6 et 10%<sup>13</sup>.

---

<sup>12</sup>Ces commodités peuvent être séparées en deux catégories : métaux précieux (or, argent, platine) et commodités commerciales (fioul, cuivre, bois, contreplaqué).

<sup>13</sup>Les travaux de Schwartz, qui compare les marchés de l'or, du pétrole et du cuivre, permettent de confirmer les résultats de Brennan (1991) : les observations réalisées sur le marché de l'or sont différentes de celles effectuées sur les marchés du pétrole brut et du cuivre. L'or étant détenu pour

Les différences constatées entre le *convenience yield* des commodités commerciales et celui des métaux précieux peuvent être expliquées par des différences dans les motifs de constitution et de détention des stocks des commodités étudiées : les métaux précieux sont détenus essentiellement pour des raisons spéculatives ; le coût de stockage est très faible par rapport à la valeur de ces stocks, qui sont détenus en quantités importantes. Le *convenience yield* n'a pas, pour ces commodités, une grande signification : les stocks ne sont pas constitués parce qu'ils interviennent dans un processus productif. Le fait que le *convenience yield* soit proche de zéro pour les métaux précieux<sup>14</sup> et positif pour les commodités commerciales est donc cohérent avec la théorie du stockage.

Les modèles monofactoriels de Brennan se révèlent peu adaptés à la représentation de la structure par terme lorsque le *convenience yield* doit être pris en considération dans l'analyse (pour les commodités commerciales). Ces travaux, comme ceux de Gibson et Schwartz (1989) également fondés sur un modèle monofactoriel, conduisent à formuler l'hypothèse, qui sera validée en développant des modèles à deux facteurs, selon laquelle le *convenience yield* doit être considéré comme une variable stochastique.

### 2.3.2.b. Le *convenience yield* comme fonction de deux variables d'état

Le *convenience yield*, dans différents modèles de Gabillon (1991, 1992, 1995) est une variable stochastique endogène. Il est exprimé en fonction des deux variables d'état du modèle, qui sont le prix au comptant  $S$  et le prix à long terme  $L$  :

$$C(S, L, t) = \beta(t) \ln \frac{S}{L} + \delta(t)$$

- où
- $C$  est le *convenience yield*,
  - $\beta(t)$  est un facteur de proportionnalité,
  - $S$  est le prix au comptant,

---

des raisons spéculatives, les valeurs estimées du *convenience yield* de cette commodité sont non significatives.

<sup>14</sup>Plus précisément, le *convenience yield* brut de ces commodités est nul, et le *convenience yield* net est faiblement négatif, parce qu'il comprend les coûts de stockage.



- $L$  est le prix à long terme,
- $\delta$  est un paramètre de dispersion.

La fonction  $\beta(t)$  est uniformément positive : plus le ratio  $S/L$  est élevé, plus le *convenience yield* est important. Ce ratio est supposé être le principal déterminant du *convenience yield* et, par conséquent, de la forme générale de la courbe des prix. L'idée sous-tendant cette formulation est que la structure par terme des prix dépend du niveau relatif du prix au comptant et du prix à long terme<sup>15</sup>.

La formulation retenue par Gabillon pour exprimer le comportement du *convenience yield* présente cependant un inconvénient : si cette variable augmente effectivement avec le prix au comptant, elle n'est stochastique que parce que les deux variables d'état en fonction desquelles elle est exprimée le sont. En représentant de la sorte le comportement du *convenience yield*, l'auteur suppose implicitement que les variations du *convenience yield* peuvent être intégralement expliquées par celles du prix au comptant et celles du prix à long terme, ce qui peut être contesté<sup>16</sup>. Enfin, dans l'analyse de Gabillon, les dynamiques du prix au comptant et du prix à long terme sont représentées par des mouvements browniens géométriques. Ainsi, pour ces deux variables comme pour le *convenience yield*, qui en dépend, les comportements d'ajustement des opérateurs aux évolutions du prix au comptant sont ignorés.

### 2.3.2.c. Le *convenience yield* comme variable d'état

Excepté Gabillon, tous les auteurs considérant que le *convenience yield* est stochastique le désignent comme seconde variable d'état, et utilisent un processus de retour vers une valeur moyenne pour représenter son comportement dynamique. Lorsque le *convenience yield* est choisi comme seconde variable d'état, le prix au

---

<sup>15</sup> En 1992, Gabillon propose d'adapter cette expression du *convenience yield* au cas des commodités caractérisées par une forte saisonnalité, telles que les produits pétroliers. La représentation du *convenience yield* est alors la suivante :  $C(S, L, t, T) = \beta(t) \ln(S/L) + \delta \cos(\omega t + \phi)$ , où  $\omega$  est la pulsation, égale à  $2\pi$  pour une périodicité annuelle, et  $\phi$  est un paramètre constant permettant l'ajustement au référentiel de temps.

<sup>16</sup> Ce point est analysé en conclusion de la sous-section 2.3.

comptant et le *convenience yield* suivent un processus de diffusion joint. Cette variable d'état n'étant pas observable, une méthode d'approximation doit être choisie. Enfin, le fait de considérer le *convenience yield* comme une source d'incertitude affectant l'évolution du prix à terme implique qu'une prime de risque lui est associée.

### ***Processus de retour vers une valeur moyenne***

Les travaux de Gibson et Schwartz publiés en 1990 se situent dans le prolongement direct de ceux réalisés l'année précédente, à l'occasion desquels ils avaient souligné la nécessité de considérer le *convenience yield* comme stochastique, et suggéré d'utiliser un processus de retour vers une valeur moyenne pour représenter son évolution dans le temps. Le comportement dynamique du *convenience yield* est représenté de la façon suivante :

$$dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_C dz_C$$

- Avec :
- $C$  : *convenience yield*,
  - $\alpha$  : valeur moyenne à long terme du *convenience yield*,
  - $\kappa$  : force de rappel agissant sur le *convenience yield*,
  - $\sigma_C$  : volatilité du *convenience yield*,
  - $z_C$  : mouvement brownien standard.

Cette formulation repose sur l'hypothèse selon laquelle il existe un niveau moyen de stocks permettant de satisfaire les besoins de l'industrie vers lequel, à travers le comportement des opérateurs, le volume des stocks et donc le *convenience yield* ont tendance à converger. Lorsque le *convenience yield* est faible, les stocks sont importants, et les opérateurs supportent un coût de stockage élevé au regard des services apportés par la détention de marchandise. S'ils sont rationnels, ils auront tendance à se défaire des marchandises excédentaires qu'ils détiennent. Inversement, si le *convenience yield* est élevé, ils chercheront à reconstituer leurs stocks. Les comportements de stockage des acteurs justifient donc le choix de la dynamique de cette variable d'état.

Les principaux résultats obtenus à l'aide de modèles à deux facteurs sont les suivants : en premier lieu, la prise en considération du *convenience yield* comme seconde variable d'état permet d'améliorer considérablement les performances prédictives des modèles stochastiques. Brennan montre, en particulier, que les erreurs de prédiction des modèles à deux facteurs sont nettement inférieures à celles des modèles monofactoriels.

Les tests empiriques réalisés à partir de ces modèles à deux facteurs permettent également de vérifier l'existence d'une tendance au retour vers une valeur moyenne pour le *convenience yield*. Le coefficient représentant la force de rappel agissant sur le *convenience yield* ( $\kappa$  dans l'exemple ci-dessus) est positif et significativement différent de zéro. Il est de plus variable en fonction de la période d'étude. La valeur moyenne à long terme  $\alpha$  vers laquelle le *convenience yield* est attiré, est également positive et significativement différente de zéro (Brennan, 1991 ; Schwartz, 1997). Elle est de plus relativement stable (Schwartz, 1997).

### ***Processus de diffusion joint***

Lorsque le *convenience yield* est considéré comme la seconde variable d'état dans un modèle de structure par terme des prix, le prix au comptant et le *convenience yield* suivent toujours un processus de diffusion joint. Bien que ces deux facteurs sous-jacents soient caractérisés par un processus stochastique autonome, leurs variations ne sont pas totalement indépendantes les unes des autres :

$$E[dz_S \times dz_C] = \rho dt$$

Avec : -  $z_S$  : mouvement brownien standard associé au prix au comptant,  
 -  $z_C$  : mouvement brownien standard associé au *convenience yield*,  
 -  $\rho$  : coefficient de corrélation liant les deux mouvements browniens.

L'estimation du coefficient de corrélation  $\rho$  confirme l'existence d'une corrélation positive entre les mouvements browniens standards des deux variables d'état.

### **Méthodes d'approximation du *convenience yield***

Le *convenience yield* n'étant pas une variable observable, il faut, comme dans le cas du prix au comptant, choisir une méthode d'approximation pour celui-ci. Le plus souvent (Gibson et Schwartz 1990 ; Gabillon, 1991 ; Brennan et Crew, 1995) le *convenience yield* instantané net des coûts de stockage est estimé, à une date  $t$ , à partir de la relation entre prix au comptant et prix à terme issue du modèle de Brennan et Schwartz (1985), en utilisant deux prix à terme de maturité proche<sup>17</sup>. Schwartz, en 1997, utilise un filtre de Kalman.

Quelle que soit la méthode retenue pour estimer le *convenience yield*, les tests empiriques montrent qu'un processus de retour vers une valeur moyenne représente de façon satisfaisante l'évolution du *convenience yield*. En revanche, le fait d'utiliser le filtre de Kalman pour obtenir des séries de données de prix au comptant et de *convenience yield* a un impact sur le coefficient de corrélation liant les mouvements browniens de ces deux facteurs sous-jacents. En calculant le *convenience yield* à partir du modèle de Brennan et Schwartz, et en utilisant une méthode SUR (Seemingly Unrelated Regression) pour estimer les paramètres de la dynamique des états, Gibson et Schwartz, en 1990, obtiennent sur le marché du pétrole brut un coefficient de corrélation relativement faible :  $\rho = 0,3$ . Ce résultat n'est pas lié à la période d'étude retenue par les deux auteurs : des tests réalisés à l'aide du filtre de Kalman sur le marché du pétrole brut, entre 1993 et 1998, le confirment.

Lorsqu'un filtre de Kalman est utilisé, le coefficient de corrélation entre les mouvements browniens des deux variables d'état augmente fortement : il atteint, selon Schwartz (1997) un niveau proche de 0,9. Cette valeur semble plus réaliste que la précédente : bien que le *convenience yield* soit une variable stochastique, il est

---

<sup>17</sup> La relation entre prix à terme et prix au comptant issue du modèle de Brennan et Schwartz est la suivante :  $F(S, t, T) = S e^{(r-c) \times (T-t)}$

avec : -  $F(S, t, T)$  : prix à terme en  $t$  d'un contrat de maturité  $T$ ,  
 -  $S$  : prix au comptant,  
 -  $c$  : *convenience yield*,  
 -  $r$  : taux d'intérêt sans risque.

Dès lors, en utilisant deux prix à terme d'échéances rapprochées  $T_1$  et  $T_2$ , il est possible d'écrire :

probable que celui-ci soit fortement corrélé au prix au comptant. En effet, on peut supposer que les hausses de prix au comptant se manifestent plus particulièrement lorsque le niveau des stocks est faible, c'est-à-dire lorsque le *convenience yield* est élevé.

### ***Prime de risque associée au convenience yield***

Le fait que le *convenience yield* soit considéré comme une source de risque affectant l'évolution du prix à terme implique qu'une prime de risque lui est associée. Brennan (1991) et Schwartz (1997) montrent que cette prime est significativement différente de zéro et varie en fonction des périodes d'étude. De plus, cette prime de risque est d'autant plus importante que le prix au comptant est élevé : un prix au comptant élevé correspond en effet à une situation dans laquelle le niveau des stocks est faible. Dans cette situation, le prix au comptant et le *convenience yield* sont plus volatiles, et le risque associé aux variations de ce dernier est plus important.

### ***2.3.3. Structure par terme des convenience yields***

Miltersen et Schwartz, en 1998, soulèvent à nouveau la question du *convenience yield* associé à la détention de contrats *forward* et de contrats à terme. Les deux auteurs définissent le *convenience yield forward* instantané continûment composé de la façon suivante<sup>18</sup> :

« Le *convenience yield forward* continûment composé,  $\delta(t,T)$ , est interprété sur le plan économique comme la valeur forward en  $t$  du

---


$$c = r - \frac{\ln(F(S, t, T_1)) - \ln(F(S, t, T_2))}{T_1 - T_2}$$

<sup>18</sup> Miltersen K.R., Schwartz E.S, 1998 : « The continuously compounded forward convenience yield,  $\delta(t,T)$  has an economic interpretation as the forward value at date  $t$  of the flow of services that accrues at date  $T$  to the holder of the physical commodity, but not to the owner of a contract for future delivery per unit time per unit of the commodity ».

*flux de services dont bénéficiera en  $T$  le détenteur de la commodité, mais pas celui d'un contrat pour une livraison future par unité de temps et par une unité de commodité».*

Dans ce contexte, un opérateur réalisant en  $t$  un achat *forward* prévoyant la livraison de la marchandise en  $T$ , et effectuant simultanément une vente *forward* pour une échéance  $T+\Delta$ , sait qu'il détiendra la marchandise entre  $T$  et  $T+\Delta$ , et bénéficie de ce fait du *convenience yield* associé à cette position *forward*. L'analyse proposée ici par les auteurs est proche de celle développée précédemment par Kaldor (1939, a)<sup>19</sup>. Un achat *forward* confère à celui qui le détient la possibilité de disposer ultérieurement de la marchandise.

Les auteurs utilisent une approche semblable à celle présentée dans le cas des opérations *forward* pour déterminer la valeur du *convenience yield* à terme continûment composé, en précisant toutefois qu'il est difficile, compte tenu du mécanisme des appels de marge caractéristique des marchés à terme, de donner à cette notion une interprétation économique.

#### 2.3.4. Conclusion

L'utilisation de modèles stochastiques dans les marchés de commodités permet d'apporter deux précisions à la théorie du stockage : en premier lieu, si les variations du *convenience yield* sont effectivement corrélées à celles du prix au comptant, cette corrélation n'est pas totale. Ensuite, la prise en considération du comportement d'ajustement des opérateurs du marché physique aux variations du prix au comptant et les tests empiriques effectués permettent de montrer que le comportement dynamique du *convenience yield* peut être exprimé par un processus de retour vers une valeur moyenne.

L'utilisation de modèles de structure par terme des prix intégrant un *convenience yield* stochastique confirme les hypothèses formulées par Gibson et Schwartz en 1989 : le *convenience yield* ne peut être exprimé comme une fonction

---

<sup>19</sup> Second chapitre, sous-section 3.2.

déterministe du prix au comptant. Pour cela, il faudrait que le *convenience yield* constitue un élément fixe de celui-ci. En d'autres termes, il faudrait que le « flux de services » représenté par cette variable soit toujours identique pour un niveau de prix au comptant donné. Or, si l'on se réfère à la définition du *convenience yield* proposée au chapitre deux, il est tout à fait envisageable qu'une variation du rythme de production, de transport, ou de transformation d'une marchandise ait un impact sur le *convenience yield* sans se traduire immédiatement par une transaction sur le marché physique et donc par une modification du prix au comptant.

Les études réalisées montrent de plus que le comportement dynamique du *convenience yield* peut être représenté par un processus de retour vers une valeur moyenne, de type Ornstein-Uhlenbek. Comme dans le cas du prix au comptant, s'il s'avère, parmi tous les travaux étudiés, être la meilleure représentation dynamique du comportement du *convenience yield*, ce processus n'est pas exempt d'inconvénients : le fait qu'il autorise l'apparition de valeurs négatives ne soulève aucune difficulté dans le cas du *convenience yield* ; cependant, comme cela a été souligné lors de l'analyse du prix au comptant (sous-section 2.1), il ne permet pas de prendre en considération l'existence d'une asymétrie, dans un marché de commodités, entre les situations de déport et les situations de report<sup>20</sup>.

Rien ne permet en effet de supposer que le *convenience yield* évolue de la même façon en situation de déport et en situation de report : sachant que le niveau du report est limité par les opérations d'arbitrage tant que les capacités de stockage ne sont pas saturées, les valeurs négatives du *convenience yield* net des coûts de stockage ne peuvent aller au-delà des coûts de stockage de la commodité<sup>21</sup>. En revanche, les situations de déport ne connaissant pas cette limite, rien n'empêche que le *convenience yield* atteigne des valeurs positives extrêmes en cas d'importante pénurie de stocks ou de forte tension sur les approvisionnements.

---

<sup>20</sup> Brennan, en 1991, ébauche ce type d'approche dans l'un de ses modèles monofactoriels (sous-section 2.3.2.a).

<sup>21</sup> Plus précisément, les valeurs négatives du *convenience yield* sont limitées à l'opposé des coûts de stockage.

## 2.4. LE TAUX D'INTERET

Jusqu'en 1997, les modèles de structure par terme des prix des commodités reposent sur l'hypothèse selon laquelle le taux d'intérêt est nul ou constant. Considérer que le taux d'intérêt est nul revient à négliger les coûts représentés par l'immobilisation de fonds lors d'une opération de stockage, qui peuvent pourtant être considérables. D'autre part, supposer que le taux d'intérêt est constant, et donc que la structure par terme des taux d'intérêt est plate, est une hypothèse d'autant plus réductrice que l'horizon d'analyse est éloigné. Elle conduit enfin à identifier les prix *forward* aux prix à terme.

Schwartz, en 1997, développe un modèle présentant un double intérêt : il introduit le taux d'intérêt comme troisième variable explicative du prix à terme dans un modèle stochastique appliqué aux marchés du pétrole brut et du cuivre<sup>22</sup>. En outre, il utilise une représentation nouvelle du comportement dynamique du prix au comptant.

Pour le taux d'intérêt comme pour le prix au comptant et le *convenience yield*, le comportement dynamique des variables d'état, est représenté par un processus de retour vers une valeur moyenne<sup>23</sup> :

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = (r - C)dt + \sigma_s dz_s \\ dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_c dz_c \\ dr = a(m - r)dt + \sigma_r dz_r \end{cases}$$

- Avec :
- S : prix au comptant,
  - C : *convenience yield*,
  - r : taux d'intérêt à court terme,
  - $\kappa$  : force de rappel agissant sur le *convenience yield*,
  - $\alpha$  : valeur moyenne à long terme du *convenience yield*,

---

<sup>22</sup> L'auteur compare ensuite trois modèles de structure par terme des prix comportant un nombre croissant de variables d'état : un modèle monofactoriel, dont l'unique facteur sous-jacent est le prix au comptant, un modèle à deux facteurs proche de celui développé avec Gibson en 1990, et un modèle à trois facteurs.



- $a$  : force de rappel agissant sur le taux d'intérêt,
- $m$  : valeur moyenne du taux d'intérêt ajustée du risque,
- $\sigma_i$  : volatilité de la variable d'état  $i$ ,
- $z_i$  : mouvement brownien associé à la variable d'état  $i$ .

La représentation du comportement dynamique du prix au comptant retenue par Schwartz diffère de celle utilisée par ses prédécesseurs : le *convenience yield* intervient dans la dynamique de cette variable et imprime à celle-ci un mouvement de retour vers une valeur moyenne. Dans tous les autres modèles de structure par terme des prix à deux facteurs, seuls les mouvements browniens des deux variables d'état sont corrélés entre eux, traduisant le fait que les variations non anticipées de ces deux facteurs sous-jacents ne sont pas totalement indépendantes les uns des autres.

La représentation retenue par Schwartz peut être expliquée de la façon suivante : dans son modèle, la commodité est considérée comme un actif de prix au comptant  $S$ , payant de façon continue un dividende stochastique  $C$ . Le rendement instantané anticipé pour cet actif est exprimé en fonction du taux d'intérêt sans risque  $r$  et du *convenience yield*  $C$  : au *convenience yield*, identifié à un dividende, est associée une variation négative du prix au comptant, par analogie avec le fait que le détachement d'un dividende fait chuter le rendement anticipé d'un actif.

Si par exemple le *convenience yield* est fortement positif, le rendement anticipé du prix au comptant ( $r-C$ ) peut devenir négatif : un *convenience yield* élevé est en effet associé à une situation de pénurie de marchandise prononcée, et à un prix au comptant supérieur à sa valeur moyenne à long terme. Les opérateurs anticipent le retour à une situation plus normale, se traduisant par une baisse du prix au comptant. Inversement, en situation de surplus, le prix au comptant est inférieur à sa valeur moyenne à long terme, le *convenience yield* net des coûts de stockage devient négatif, et le rendement anticipé du prix au comptant est supérieur à celui du taux d'intérêt sans risque  $r$ . Les opérateurs anticipent une hausse du prix au comptant.

---

<sup>23</sup> La dynamique des états est ici exprimée sous la probabilité risque-neutre. Des précisions concernant ce type de formulation peuvent être trouvées en annexe deux, et au chapitre quatre.

L'introduction d'un taux d'intérêt stochastique dans l'analyse des relations entre les prix à terme des commodités comble une lacune sur le plan théorique : l'hypothèse faite par les prédécesseurs de Schwartz conduit en effet à considérer comme identiques prix à terme et prix *forward*, ce qui n'est pourtant pas le cas<sup>24</sup>. Lorsque le taux d'intérêt n'est plus constant, le mécanisme des appels de marges, caractéristique des marchés à terme et absent des marchés forward, peut être pris en considération. Deux profils de paiements distincts peuvent alors être établis pour les deux catégories d'actifs que constituent les contrats à terme et les contrats *forward*.

La présence du taux d'intérêt comme variable explicative des prix à terme est enfin justifiée par l'analyse des relations entre les prix à terme proposée par la théorie du stockage ; celle-ci repose en effet sur l'identification de trois facteurs explicatifs de l'évolution du prix à terme : le prix au comptant, le *convenience yield*, et le taux d'intérêt.

### SECTION 3. PERFORMANCES DES MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX

L'utilisation de modèles stochastiques dans le cadre des commodités permet d'envisager la valorisation d'un prix à terme pour n'importe quelle échéance. Les performances de ces modèles sont mesurées au regard de leur capacité à représenter des structures par terme des prix proches de celles observées dans la réalité, et de leur aptitude à prévoir les prix à terme.

En termes de description de la structure par terme des prix, les performances des modèles s'améliorent avec l'introduction de variables d'état supplémentaires. Quant à leur capacité à prévoir les prix, elle diminue, quel que soit le type de modèle considéré, au fur et à mesure que la maturité des contrats augmente. Ceci peut être expliqué, en partie, par la faible liquidité des marchés à terme de commodités pour les maturités les plus éloignées : plus les échéances augmentent, moins les prix observés sur le marché sont fiables.

---

<sup>24</sup> Cox, Ingersoll, Ross, (1981).

### 3.1. MODELES MONOFACTORIELS

En terme de représentation de la structure par terme des prix, les performances des modèles monofactoriels ne sont pas satisfaisantes, en particulier lorsque les commodités considérées sont insérées dans un processus industriel. Ces modèles, marquant les premières tentatives de l'utilisation des méthodes de valorisation relative dans les marchés de commodités, n'ont ensuite été développés que pour établir des comparaisons avec des modèles plus sophistiqués.

Les modèles monofactoriels présentent des inconvénients identiques à ceux des modèles de même type développés dans le cadre des marchés obligataires. Ils seront analysés en détail au chapitre quatre. A ce stade, notons simplement que ces modèles ne permettent pas de représenter une structure par terme des prix de façon satisfaisante. Un modèle dans lequel le processus stochastique du prix au comptant est représenté par un mouvement brownien géométrique présente les inconvénients suivants : lorsque la maturité des contrats à terme tend vers l'infini, le niveau du prix à terme diverge ; de plus, dans ce type de modèle, la structure par terme des volatilités des prix à terme est plate, ce qui est contraire aux observations empiriques. Enfin, ces modèles ne permettent de représenter que trois formes de structure par terme des prix : décroissante, croissante ou stable. Tous les modèles monofactoriels appliqués aux marchés de commodités, à savoir le modèle de Brennan et Schwartz (1985), le modèle de Gibson et Schwartz (1989) et certains modèles monofactoriels développés par Brennan (1991) présentent ces différents inconvénients.

Les performances prédictives des modèles monofactoriels sont déductibles de leur aptitude à représenter la structure par terme des prix : elles sont peu satisfaisantes, et ce particulièrement pour les commodités intégrées dans un processus industriel (Brennan, 1991). Sur les marchés du cuivre et du pétrole brut, Schwartz (1997) compare les prévisions de prix à terme obtenues à partir de trois modèles différents incluant respectivement une, deux et trois variables d'état : le modèle monofactoriel est systématiquement le moins performant des trois.

### 3.2. MODELES A DEUX FACTEURS

Les modèles à deux facteurs permettent généralement d'obtenir des structures par terme proches de celles observées dans la réalité : courbes en bosse, en cuvette, croissantes, décroissantes ou stables. De plus, ils permettent de prendre en considération l'existence d'une structure par terme décroissante de la volatilité. Le modèle de Brennan (1991), les différentes variantes du modèle de Gabillon (1991, 1992, 1995), le modèle de Gibson et Schwartz (1990) et le modèle de Schwartz (1997) appartiennent à cette catégorie.

En termes de capacités à prévoir les prix à terme, les erreurs de prédiction des modèles à deux facteurs sont relativement faibles par rapport au niveau de prix moyen des commodités considérées : sur les marchés de l'or, du cuivre et du platine, Brennan (1991) parvient à des erreurs de prix inférieures à 1% du prix moyen. Les erreurs de prévisions du modèle à deux facteurs de Schwartz (1997) sont environ trois fois moins importantes que celles de son modèle monofactoriel, quels que soient les marchés et les échéances considérés.

### 3.3. MODELE A TROIS FACTEURS

L'intérêt de l'introduction d'une troisième variable d'état dans les modèles stochastiques appliqués aux marchés de commodités est particulièrement significatif lorsque les échéances considérées sont très éloignées<sup>25</sup>. Pour des maturités inférieures à deux ans, la structure par terme des prix obtenue avec un modèle à taux d'intérêt constant ne peut être distinguée de celle issue d'un modèle avec taux d'intérêt stochastique. Au-delà, les structures par terme obtenues à partir de ces deux modèles divergent l'une de l'autre.

En termes de performances prédictives, pour les maturités rapprochées, l'intérêt de l'introduction d'une troisième variable d'état semble limité : les résultats

établis à partir du modèle à deux facteurs de Schwartz (1997) sont tout aussi satisfaisants que ceux du modèle à trois facteurs. Pour les maturités plus éloignées en revanche, les performances prédictives du modèle à trois facteurs sont supérieures. L'écart de performance entre les modèles à deux et à trois facteurs est cependant inférieur à celui séparant les modèles à un et à deux facteurs.

Les travaux étudiés permettent de dégager un certain nombre d'enseignements concernant l'élaboration de modèles stochastiques dans les marchés de commodités industrielles stockables. En premier lieu, à moins de renoncer à pouvoir représenter correctement les différentes formes de la structure par terme des prix observées dans la réalité, un modèle stochastique doit comporter au moins deux variables d'état : le prix au comptant et, si l'on se réfère aux enseignements de la théorie du stockage, le *convenience yield*. Ensuite, le comportement dynamique du prix au comptant comme celui du *convenience yield* doivent être représentés par un processus de retour vers une valeur moyenne. Enfin, pour des échéances de livraison supérieures à deux ans, il est important d'introduire une troisième variable d'état dans l'analyse : le taux d'intérêt.

## SECTION 4. CONCLUSION

L'emploi des modèles stochastiques pour l'analyse de la structure par terme des prix des commodités sonne le glas de la théorie du déport normal comme unique explication des relations entre prix à terme. Celle-ci ne prend en effet en considération que deux facteurs explicatifs de l'évolution des prix à terme, à savoir le prix au comptant anticipé et la prime de risque qui lui est associée :

$$F(t,T) = E_t[S(T)] - \Pi$$

Avec :           -  $F(t, T)$  : prix en  $t$  du contrat parvenant à échéance en  $T$ ,  
                  -  $E_t[S(T)]$  : prix au comptant anticipé en  $t$  pour la date  $T$ ,

---

<sup>25</sup> Schwartz (1997) dispose, pour ses tests empiriques, de séries de prix forward pour une échéance de

-  $\Pi$  : prime marginale de risque.

En univers incertain et dans un cadre intertemporel, cette prime  $\Pi$  doit être variable dans le temps.

L'utilisation de la théorie du déport normal dans le cadre d'un modèle de structure par terme des prix conduit à l'élaboration de modèles monofactoriels dont l'unique variable d'état est le prix au comptant, auquel est associé une prime de risque. Ce type de modèle, quelle que soit la formulation retenue pour représenter le comportement dynamique du prix au comptant, ne permet pas de représenter des structures par terme des prix proches de celles observées dans le cadre des marchés de commodités industrielles stockables. Pour pouvoir envisager des évolutions non strictement parallèles de la courbe des prix, il faut intégrer une seconde variable d'état dans l'analyse.

La théorie du stockage fait intervenir un plus grand nombre de facteurs explicatifs du prix à terme que la théorie du déport normal ; elle conserve le prix au comptant comme déterminant du prix à terme et fait disparaître la prime de risque qui lui est associée (Brennan, 1958). A ce premier facteur s'ajoutent le coût pur de stockage (frais d'entreposage de la marchandise), le *convenience yield* et le taux d'intérêt, lié au coût d'immobilisation des stocks. Selon la formulation proposée en conclusion du chapitre deux, la relation entre prix à terme et prix au comptant peut être exprimée de la façon suivante :

$$F(t,T) = S(t) + C_S(t,T) - [A_I(t) + C_R(t)]$$

Avec : -  $F(t,T)$  : prix à terme en  $t$  du contrat parvenant à échéance en  $T$ ,

-  $S(t)$  : prix au comptant en  $t$  de la commodité livrable sous contrat,

-  $C_S(t,T)$  : coût de stockage entre  $t$  et  $T$  (frais d'entreposage et frais financiers),

-  $A_I(t)$  : avantage présenté par la détention de stocks en situation d'incertitude,

-  $C_R(t)$  : coûts de la rigidité.

Dans cette expression, le coût de stockage comporte deux éléments : les frais financiers liés à l'immobilisation de la marchandise, et les coûts de stockage « purs », tels que le coût de location des entrepôts, les frais administratifs,... Les

frais financiers sont proportionnels au prix de la commodité et dépendent du taux d'intérêt. Les coûts de stockage purs peuvent être considérés comme constants tant que les capacités de stockage ne sont pas parvenues à saturation.

En identifiant explicitement les deux composantes du coût de stockage, la relation entre prix au comptant et prix à terme peut être modifiée de la façon suivante :

$$\frac{F(t,T) - S(t)}{S(t)} = r(t,T) + \frac{C_P - [A_I + C_R]}{S(t)}$$

- Avec :
- $r$  : taux d'intérêt entre  $t$  et  $T$ ,
  - $C_P$  : coûts purs de stockage.

En univers incertain, les différents déterminants de la relation de prix présentée ci-dessus, excepté le coût pur de stockage, constituent trois sources d'incertitude distinctes permettant d'expliquer l'évolution du prix à terme. Dans un modèle de structure par terme des prix, chacune d'entre elles peut être représentée par un facteur sous-jacent. Parmi les différents modèles étudiés cependant, pour des raisons de simplicité lors de l'application empirique des modèles, seul celui de Schwartz (1997) intègre trois variables d'état.

Les modèles de structure par terme des prix des commodités permettent l'analyse de deux primes de risques distinctes : celle associée au prix au comptant, au centre de la théorie du déport normal, et celle associée au *convenience yield*, spécifique à la théorie du stockage. Si l'on considère en effet que le prix au comptant n'est pas parfaitement corrélé au *convenience yield*, et que chacune de ces deux variables constitue une source d'incertitude affectant l'évolution du prix à terme, une prime de risque peut être associée à chacune d'entre elles. En pratique cependant, pour des raisons qui seront précisées ultérieurement<sup>26</sup> l'étude empirique de ces deux primes de risque n'est jamais réalisée de façon simultanée.

Les travaux empiriques apportent les informations suivantes concernant les primes de risque associées aux variables d'état des modèles de structure par terme des prix des commodités : la prime de risque associée au prix au comptant n'est pas

---

<sup>26</sup> Chapitres quatre et cinq.

significativement différente de zéro (Schwartz, 1997). De plus, celle associée au *convenience yield* est instable (Gibson et Schwartz, 1990).

Les modèles de structure par terme des prix des commodités permettent également d'améliorer la compréhension du comportement dynamique du *convenience yield*, et de ses relations avec les autres facteurs explicatifs du prix à terme.

L'application des modèles de structure par terme aux marchés de commodités présente de nombreux avantages : elle permet d'améliorer la compréhension de la relation entre les prix et d'envisager de nouvelles utilisations des marchés à terme. L'adaptation des méthodes de valorisation relative recensées dans ce chapitre présente cependant une limite : dans ce contexte, les mouvements de prix des commodités sont en effet sensés être relativement réguliers. L'utilisation de ces modèles stochastiques ne permet donc pas de prévoir les prix de façon satisfaisante en période de crise, lorsque ceux-ci connaissent de brusques et amples variations<sup>27</sup>. Enfin, si les modèles stochastiques permettent de progresser sur un certain nombre de points par rapport aux théories traditionnelles, c'est au prix d'un accroissement de la complexité de l'analyse et des techniques employées pour résoudre les difficultés rencontrées.

---

<sup>27</sup> Pour prendre en considération l'éventualité de crises venant perturber le fonctionnement normal du marché physique, un processus de saut peut être intégré dans la dynamique du prix au comptant, comme Brennan et Schwartz le mentionnent en 1985. Hilliard et Reis en 1998, proposent un modèle de ce type.



**Tableau 3.1 : Principaux modèles de structure par terme des prix des commodités**

Auteurs	Variables d'état	Dynamique des états
Brennan, Schwartz, 1985	S : prix au comptant	$dS/S = \mu dt + \sigma_S dz_S$
Gibson, Schwartz, 1989	S : prix au comptant	$dS/S = \mu dt + \sigma_S dz_S$
Gibson, Schwartz, 1990	S : prix au comptant C : <i>convenience yield</i>	$dS/S = \mu dt + \sigma_S dz_S$ $dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_C dz_C$
Brennan, 1991	S : prix au comptant C : <i>convenience yield</i> . (2 modèles)	1) $dS/S = \mu dt + \sigma_S dz_S$ • $C(S) = cS$ • $C(S) = a + b$ • $C(S) = \max(a, b + cS)$ 2) $dC = \kappa(m - C)dt + \sigma dz_c$
Gabillon, 1991	S : prix au comptant L : prix à long terme	$dS/S = \mu_S dt + \sigma_S dz_S$ $dL/L = \mu_L dt + \sigma_L dz_L$
Cortazar, Schwartz, 1994	F : prix à terme	$dF/F = \sum b_k dz_k$
Schwartz, 1997	S : prix au comptant C : <i>convenience yield</i> r : taux d'intérêt  (3 modèles)	1) $dS = \kappa(\mu - \ln S)Sdt + \sigma_S Sdz_S$ 2) $dS = (\mu - C)Sdt + \sigma_S Sdz_S$ $dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_C dz_C$ 3) $dS = (r - C)Sdt + \sigma_S Sdz_S$ $dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_C dz_C$ $dr = a(m - r)dt + \sigma_r dz_r$

## CHAPITRE 4 : TROIS MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX ; UNE COMPARAISON.

Ce chapitre a pour objectif d'analyser les caractéristiques de trois modèles de structure par terme des prix des commodités. Deux de ces modèles seront ensuite utilisés pour effectuer des études empiriques sur le marché du pétrole brut (troisième partie de cette thèse).

La première section de ce chapitre est consacrée à la présentation de ces modèles. Parmi eux, deux constituent, en 1999, une référence dans le domaine des commodités : le modèle monofactoriel développé par Brennan et Schwartz en 1985 représente la version la plus simple de modèle stochastique appliqué aux marchés de commodités (1.1) ; le modèle proposé par Schwartz en 1997 est inspiré de celui développé en 1990 par Gibson et Schwartz (1.2). Ce second modèle a suscité de nombreux travaux<sup>1</sup>. Le troisième modèle, développé dans le cadre de cette thèse, est une version généralisée du précédent. Il introduit une asymétrie dans le comportement du *convenience yield* (1.3).

En seconde section de ce chapitre, des simulations sont réalisées pour mettre en évidence les caractéristiques distinctives de ces modèles, à travers l'étude de leur sensibilité aux valeurs des paramètres et des variables d'état. La troisième section permet de conclure.

### SECTION 1. PRESENTATION DES MODELES

Les trois modèles de structure par terme des prix des commodités présentés dans cette première section reposent sur un certain nombre d'hypothèses identiques, qui peuvent être formulées de la façon suivante :

---

<sup>1</sup> Brennan et Crew (1995) ; Hilliard et Reis (1998) ; Schwartz (1997) ; Cortazar et Schwartz (1998).

- H1 : les actifs sont traités sur des marchés sans frictions, sans taxes, ni coûts de transaction,
- H2 : les actifs sont échangés en continu, de telle sorte que les opérateurs peuvent en permanence rééquilibrer leur portefeuille,
- H3 : il n'y a pas de restriction à la vente à découvert : les taux de prêt et d'emprunt sont égaux,
- H4 : les taux d'intérêt sont constants.

A ces hypothèses s'ajoutent celles relatives à la dynamique des états, spécifiques à chaque modèle.

Une démarche identique préside à l'élaboration de ces modèles : la première étape consiste à identifier les sources d'incertitude affectant le prix à terme, à postuler que le prix à terme dépend de ces dernières, et à définir, sous forme de processus d'Itô, la dynamique des variables d'état du modèle (1.x.1). Ensuite, sachant que le prix d'un contrat à terme est une fonction des variables d'état, du temps, et de l'échéance du contrat considéré, l'application du lemme d'Itô permet d'exprimer les paramètres du processus suivi par le prix à terme en fonction des caractéristiques dynamiques des variables d'état, et des dérivées partielles de la fonction de prix (1.x.2). A ce stade, un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture permettent d'obtenir la prime de terme associée à chaque modèle (1.x.3), pour aboutir à la détermination de l'équation fondamentale de valorisation et, lorsque c'est possible, à la solution de cette équation (1.x.4).

### 1.1. MODELE DE BRENNAN ET SCHWARTZ (BG)<sup>2</sup>

Le modèle monofactoriel développé par Brennan et Schwartz en 1985 a pour unique variable d'état le prix au comptant de la commodité. Il prend toutefois en considération l'existence du *convenience yield*, mais suppose que celui-ci est constant.

---

<sup>2</sup> Les initiales BG signifient Brownien Géométrique, en référence à la notion de mouvement brownien géométrique, pour des raisons exposées ultérieurement.

### 1.1.1. Dynamique des états

La dynamique du prix au comptant, dans ce modèle, est exprimée de la façon suivante :

$$dS = \mu S dt + \sigma_S S dz_S \quad (\text{BG1})$$

- où :
- $S$  est le prix au comptant de la commodité,
  - $\mu$  est le rendement instantané anticipé pour la variable  $S$ ,
  - $dz_S$  est l'incrément du mouvement brownien associé à  $S$ ,
  - $\sigma_S$  est la volatilité du prix au comptant.

Dans ce modèle, le prix au comptant suit un mouvement brownien géométrique (d'où l'abréviation BG retenue pour le nommer dans la suite de cette thèse). Cette représentation de la dynamique des prix est très fréquemment utilisée pour modéliser le comportement des prix des actions. Elle implique que la variation du prix au comptant à un instant  $t$  est indépendante des variations passées, et que le prix évolue selon la tendance  $\mu$ .

L'aléa affectant l'évolution du prix au comptant est proportionnel au niveau de cette variable d'état, ce qui peut être expliqué de la façon suivante : lorsque les stocks sont rares, les prix au comptant sont élevés. Dans cette situation, toute modification de la demande de commodité a un impact plus important sur les prix au comptant, les stocks n'étant pas suffisamment abondants pour amortir les fluctuations de prix.

Enfin, comme cela a déjà été mentionné au chapitre trois, la dynamique du prix au comptant, telle qu'elle est exprimée, ignore les comportements d'ajustement des acteurs aux évolutions du prix au comptant et les modifications de l'offre et de la demande qui en résultent.

### 1.1.2. Comportement dynamique du prix à terme

Dans ce contexte, le prix à terme  $F$  est une fonction du temps  $t$ , de l'unique variable d'état  $S$ , et de la date d'échéance du contrat  $T$  :  $F(S, t, T)$ . En exprimant la maturité  $(T - t)$  par la variable  $\tau$ , il est possible d'écrire :

$$F(S, t, T) = F(S, \tau)$$

Si la fonction associant le prix à terme  $F$  à la variable d'état et à la maturité est deux fois continûment dérivable sur  $[0, \infty[ \times [0, T]$  et si cette variable d'état suit un processus de diffusion,  $F$  suit le même processus. Il est alors possible de décrire le comportement du prix à terme à l'aide du lemme d'Itô. L'équation différentielle stochastique suivante est obtenue<sup>3</sup> :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left\{ F_t dt + F_S(dS) + \frac{1}{2} F_{SS}(dS)^2 \right\}$$

En utilisant les propriétés du calcul stochastique<sup>4</sup>, les termes intermédiaires suivants peuvent être calculés :

$$F_S(dS) = \mu S F_S dt + \sigma_S S F_S dz$$

$$\frac{1}{2} F_{SS}(dS)^2 = \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} dt$$

$$F_t dt = -F_\tau dt$$

En séparant les termes déterministes et les termes aléatoires, il est possible d'exprimer le rendement instantané du prix à terme de la façon suivante :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + \mu S F_S - F_\tau \right\} dt + \frac{1}{F} \sigma_S S F_S dz \quad (\text{BG2})$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dF}{F} = E(S, t, T) dt + Z(S, t, T) dz$$

<sup>3</sup> Pour alléger les écritures, les notations suivantes sont retenues :

$G_X$  pour  $\frac{\partial G}{\partial X}$ ,  $G_{XX}$  pour  $\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}$ ,  $G_{XY}$  pour  $\frac{\partial^2 G}{\partial X \partial Y}$ . Ces notations seront conservées par la suite.

<sup>4</sup> Ces propriétés sont présentées en annexe un.

Le rendement instantané du prix à terme suit un processus stochastique dont l'espérance  $E$  est une fonction des paramètres déterminant la dynamique du prix au comptant. Il est en outre affecté par une composante aléatoire  $Z$ , qui représente l'impact sur le rendement du prix à terme des perturbations non anticipées affectant la variable d'état.

### 1.1.3. Raisonement d'arbitrage

A ce stade, un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture sont utilisés pour obtenir l'équation fondamentale de valorisation associée au modèle. Ce raisonnement d'arbitrage est le suivant : dans un univers où les transactions sont réalisées en continu, et dans un marché complet, un actif contingent (contrat à terme de commodité dans le cas présent) peut être répliqué par une combinaison d'actifs existants. Ces actifs doivent en premier lieu être non redondants : chacun doit représenter une source de risque distincte affectant le prix de l'actif contingent. De plus, ils doivent être suffisamment échangés pour que l'on puisse les considérer comme évalués en l'absence de toute opportunité d'arbitrage (de tels actifs sont qualifiés de « *basic securities* »)<sup>5</sup>. Sous ces conditions, ces actifs peuvent alors constituer un portefeuille de couverture répliquant l'actif contingent, leurs proportions respectives étant déterminées de telle sorte que la stratégie soit non risquée, et que la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage soit respectée.

En adoptant une méthode similaire à celle utilisée par Black et Scholes (1973)<sup>6</sup> pour valoriser le prix d'une option d'achat sur action, le portefeuille de couverture utilisé pour répliquer le prix d'un contrat à terme de commodité devrait être composé d'une position sur l'actif sous-jacent (la commodité), d'une position sur l'actif contingent (le contrat à terme), et d'une position sur l'actif sans risque.

---

<sup>5</sup> Les remarques concernant les conditions requises pour que les actifs composant le portefeuille de couverture permettent effectivement de répliquer l'actif contingent, et pour que les équations fondamentales de valorisation des modèles utilisés dans cette thèse puissent être résolues en considérant que la probabilité risque-neutre est unique, à l'aide d'une solution de type Feynman-Kac, (voir en particulier les annexes trois, quatre et cinq), sont dues au Professeur Hélyette Geman.

<sup>6</sup> Ce modèle est présenté en annexe deux.

Cependant, les marchés physiques de commodités peuvent difficilement être considérés comme des marchés sur lesquels il n'existe aucune opportunité d'arbitrage, de telle sorte que l'actif sous-jacent dans ce cas, ne peut pas réellement être qualifié de « *basic security* ».

Il peut alors être envisagé de remplacer la position sur le marché physique par une position sur un contrat à terme. Le prix de ce contrat doit être fortement corrélé aux évolutions du prix au comptant de la commodité, qui représente, dans ce modèle, l'unique source de risque affectant les évolutions du prix à terme. Dès lors, le portefeuille de couverture ne comprend plus que deux positions sur le marché à terme : la position sur l'actif sans risque disparaît, car l'investissement dans un contrat à terme peut être considéré comme nul, exception faite du dépôt.

Cette solution repose sur l'hypothèse selon laquelle le contrat à terme utilisé pour représenter la position sur le marché physique peut être qualifié de « *basic security* ». Cette hypothèse est nécessaire pour constituer un portefeuille de couverture permettant de répliquer l'actif contingent, et, par conséquent, pour valoriser un contrat à terme comme si l'on se trouvait en situation de marchés complets<sup>7</sup>, en l'absence d'opportunité d'arbitrage. Elle sera donc considérée comme vérifiée dans la suite de cette thèse.

Considérons un portefeuille de valeur  $V$ , constitué d'une proportion  $w_1$  de contrats à terme de prix  $F_1$  et de maturité  $\tau_1$ , et de  $w_2$  contrats à terme de prix  $F_2$  et de maturité  $\tau_2$ . Le rendement de ce portefeuille est le suivant :

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = w_1 \frac{dF_1(S, \tau_1)}{F_1(S, \tau_1)} + w_2 \frac{dF_2(S, \tau_2)}{F_2(S, \tau_2)}$$

Ce rendement peut être exprimé comme la somme de deux éléments : le premier est une combinaison linéaire des rendements anticipés des actifs qui composent le portefeuille, le second reflète le risque associé à ces actifs. Il est donc possible d'écrire :

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = [w_1 E_1(S, \tau_1) + w_2 E_2(S, \tau_2)] dt + [w_1 Z_1(S, \tau_1) dz_1 + w_2 Z_2(S, \tau_2) dz_2]$$

---

<sup>7</sup> La notion de marchés complets est définie en annexe deux.

Conformément au raisonnement d'arbitrage précédent, les proportions  $w_1$  et  $w_2$  sont choisies de telle sorte que ce portefeuille soit non risqué. De plus, ce portefeuille, constitué de contrats à terme, ne nécessite aucun investissement : son rendement instantané doit donc être nul. Ces conditions de rendement et de risque nuls impliquent que le système suivant soit vérifié pour tous les couples de maturité  $(\tau_1, \tau_2)$  :

$$\begin{cases} w_1 Z_1(S, \tau_1) + w_2 Z_2(S, \tau_2) = 0 \\ w_1 E_1(S, \tau_1) + w_2 E_2(S, \tau_2) = 0 \end{cases}$$

Avec  $(w_1 + w_2) = 1$

La résolution de ce système permet de mettre en évidence l'existence d'une relation linéaire, indépendante de l'échéance  $\tau$ , entre la tendance  $E$  et le coefficient de dispersion  $Z$  caractérisant la dynamique du prix à terme. La seconde équation du système permet en effet de déterminer le ratio de couverture :  $\frac{w_1}{w_2} = -\frac{E_2}{E_1}$ . Lorsque celui-ci est intégré dans la première équation du système, la relation suivante peut être établie :

$$\frac{E_1(S, \tau_1)}{Z_1(S, \tau_1)} = \frac{E_2(S, \tau_2)}{Z_2(S, \tau_2)} = \lambda_S$$

Ainsi, il existe un paramètre  $\lambda_S$  tel que, quelle que soit la maturité  $\tau$  considérée, il est possible d'écrire :

$$E(S, \tau) = \lambda_S Z(S, \tau) \quad (\text{BG3})$$

$\lambda_S Z(S, \tau)$  est la prime de terme  $\phi(S, t, T)$  du modèle BG, associée à l'unique variable d'état. En remplaçant  $Z(S, \tau)$  par sa valeur, la relation suivante est obtenue :

$$\phi(S, t, T) = E(S, t, T) = \lambda_S \sigma_S S \frac{F_S}{F}$$

La prime de terme correspond à la rémunération offerte à l'équilibre pour le risque associé à l'unique variable d'état  $S$ .  $\lambda_S$  représente le prix de marché du risque associé au prix au comptant, ou prime de risque unitaire offerte à l'équilibre pour le risque de prix au comptant. Dans la suite de cette thèse, en particulier lors des estimations des différents modèles présentés,  $\lambda_S$  sera supposé constant : cette hypothèse est justifiée si l'on considère que ce paramètre représente l'aversion moyenne des investisseurs à l'égard du risque et que cette aversion varie peu au



cours du temps<sup>8</sup>.  $\lambda_S \sigma_S$  est la rémunération pour le risque associé au prix au comptant : c'est la prime de risque de ce facteur.

#### 1.1.4. Equation fondamentale de valorisation

En remplaçant  $E(S, \tau)$  et  $Z(S, \tau)$  par leurs valeurs dans l'équation (BG3), l'équation fondamentale de valorisation des prix à terme est obtenue :

$$\frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + \mu S F_S - F_\tau \right\} = \lambda_S \sigma_S S \frac{F_S}{F}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + (\mu - \lambda_S \sigma_S) S F_S - F_\tau = 0$$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, la tendance de l'actif sous-jacent  $S$  est la suivante :  $(\mu - \lambda_S \sigma_S)$ . Cet actif étant considéré comme un actif échangé<sup>9</sup> payant un dividende de taux  $c$ , sa tendance, exprimée en univers risque-neutre, peut également être écrite  $(r - c)$ , où  $c$  est le *convenience yield*, considéré comme une constante<sup>10</sup>, et  $r$  est le taux d'intérêt sans risque :

$$(\mu - \lambda_S \sigma_S) = (r - c)$$

La définition retenue pour le *convenience yield* par Brennan et Schwartz a été présentée au chapitre trois. Le *convenience yield*, net des coûts de stockage, intervient ici comme un taux de dividende affectant le prix de la commodité. Il capte

<sup>8</sup> Géman H., 1989 : « L'Importance de la Probabilité « Forward Neutre » dans une Approche Stochastique des Taux d'intérêt », *Cahier de recherche de l'Essec*, avril.

<sup>9</sup> La distinction entre actif échangé et actif non échangé est réalisée par Hull (1993) de la façon suivante : « The term « traded security » is here used to describe a traded asset that is held solely for investment by a significant number of individuals. Stocks, bonds, gold and silver are traded assets. However, interest rates, inflation rates, and most commodities are not. »

La distinction entre actifs échangés et actifs non échangés n'est pas neutre quant à la détermination de la structure par terme des prix. Lorsqu'une variable d'état est le prix d'un actif échangé, l'aversion au risque des opérateurs peut être négligée dans la détermination de la structure par terme des prix. En revanche, lorsque le facteur sous-jacent n'est pas un actif échangé, l'attitude par rapport au risque des acteurs doit être prise en considération.

Dans le modèle BG, comme dans les deux suivants, la commodité, malgré la définition donnée par Hull, est considérée comme un actif échangé. Cette hypothèse permet de déterminer les équations de valorisation des trois modèles de structure par terme présentés dans ce chapitre.

<sup>10</sup> Le *convenience yield* est représenté par une minuscule,  $c$ , lorsqu'il est considéré comme une fonction déterministe du prix au comptant. Inversement, il est représenté par une majuscule,  $C$ , lorsque qu'il est considéré comme une variable d'état.

tous les facteurs conduisant la tendance du prix au comptant à un niveau inférieur à celui du taux d'intérêt sans risque.

En remplaçant  $(\mu - \lambda_S \sigma_S)$  par  $(r - c)$ , l'équation fondamentale de valorisation du prix à terme peut être écrite de la façon suivante :

$$\boxed{\frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + (r - c) S F_S - F_\tau = 0} \quad (\text{BG4})$$

L'utilisation d'un processus en univers risque-neutre, particulièrement utile pour la résolution de cette équation<sup>11</sup> ne signifie pas nécessairement que les agents sont neutres au risque, mais plutôt que la neutralité au risque s'applique à un processus ajusté du risque.

La condition aux bornes associée à l'équation fondamentale de valorisation est :

$$F(S, T, T) = S(T) \quad (\text{BG5})$$

Cette condition aux bornes, identique pour les trois modèles de valorisation étudiés, représente le processus de convergence du prix à terme vers le prix au comptant à l'échéance du contrat à terme. Ce processus est lié à l'existence d'une procédure de livraison à l'échéance du contrat à terme. Si, à l'échéance du contrat, le prix à terme est différent du prix au comptant, des opérations d'arbitrage rétablissent immédiatement la convergence.

La solution de cette équation aux dérivées partielles est la suivante :

$$\boxed{F(S, t, T) = S e^{(r-c)\tau}} \quad (\text{BG6})$$

Elle est déterminée en utilisant une solution de type Feynman-Kac, en supposant que la commodité est un actif échangé. Cette façon de procéder n'est pas tout à fait satisfaisante sur le plan théorique, car elle repose sur une hypothèse de marché complet et d'absence d'opportunité d'arbitrage. Elle permet cependant d'obtenir une solution analytique pour le modèle, ce qui facilite considérablement le calcul des prix à terme théoriques et l'estimation des paramètres.

---

<sup>11</sup> Cette résolution est présentée en annexe trois.

## 1.2. MODELE DE SCHWARTZ (MR)<sup>12</sup>

Le modèle étudié correspond à celui développé par Gibson et Schwartz en 1990, incluant les modifications apportées par Schwartz en 1997. L'hypothèse centrale de ce modèle est que le prix à terme d'une commodité à un instant  $t$  et pour une échéance  $T$  dépend principalement de deux variables d'état : le prix au comptant  $S$  et le *convenience yield*  $C$ . Les raisons expliquant le choix de cette seconde variable d'état ont été exposées au chapitre précédent.

### 1.2.1. Dynamique des états

Dans ce modèle, la dynamique des états est exprimée de la façon suivante :

$$\begin{cases} dS = (\mu - C)Sdt + \sigma_S S dz_S \\ dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_C dz_C \end{cases} \quad (\text{MR1})$$

Avec :  $\kappa, \sigma_S, \sigma_C > 0$

- où
- $S$  est le prix au comptant,
  - $C$  est le *convenience yield*,
  - $\mu$  est le rendement instantané anticipé pour la variable  $S$ ,
  - $\alpha$  est la moyenne à long terme du *convenience yield*,
  - $\kappa$  est la vitesse d'ajustement du *convenience yield*,
  - $dz_S$  est l'incrément du mouvement brownien associé au prix au comptant,
  - $dz_C$  est l'incrément du mouvement brownien associé au *convenience yield*,
  - $\sigma_S$  est la volatilité du prix au comptant,
  - $\sigma_C$  est la volatilité du *convenience yield*.

Les deux variables d'état suivent un processus de diffusion joint :

$$E[dz_S \times dz_C] = \rho dt$$

où  $\rho$  est le coefficient de corrélation liant les deux browniens.

---

<sup>12</sup> Les initiales MR signifient Mean Reverting, pour des raisons exposées ultérieurement.

Dans ce modèle, la dynamique du prix au comptant intègre explicitement le *convenience yield* (plus précisément, le *convenience yield* net des coûts de stockage). Ce dernier modifie la tendance du prix au comptant en intervenant comme un dividende stochastique. Cette représentation correspond à celle proposée par Schwartz en 1997. Elle donne au prix au comptant, à travers la corrélation entre les deux variables d'état, une tendance à revenir vers sa valeur moyenne. Dans le modèle présenté par Gibson et Schwartz en 1990, la dynamique du prix au comptant était identique à celle du modèle BG. Le modèle de Schwartz permet donc, à l'inverse du modèle BG et de celui de 1990, de prendre en considération les comportements des acteurs face aux variations du prix au comptant et les modifications de l'offre et de la demande qui en découlent.

La définition retenue pour le *convenience yield*, dans cette approche, est là encore celle proposée par Brennan et Schwartz en 1985. Contrairement au modèle BG, et conformément aux travaux de Gibson et Schwartz (1989) cette variable n'est plus constante ; c'est la seconde variable d'état du modèle. Les raisons pour lesquelles un processus de retour vers une moyenne à long terme a été choisi pour le *convenience yield* ont été exposées en sous-section 2.3.2 du chapitre précédent. Ce modèle sera qualifié, dans la suite de ces travaux, de modèle MR (*Mean Reverting*).

### 1.2.2. Dynamique du prix à terme

Le prix à terme  $F$  est une fonction du temps  $t$ , des variables d'état  $S$  et  $C$ , et de l'échéance  $T$  du contrat considéré :  $F(S, C, t, T) = F(S, C, \tau)$ . Si la fonction associant le prix à terme  $F$  aux variables d'état et à la maturité est deux fois continûment dérivable, il est possible de décrire le comportement du prix à terme pour une échéance  $T$  à l'aide du lemme d'Itô :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left\{ F_t + F_S(dS) + F_C(dC) + \frac{1}{2} F_{SS}(dS)^2 + \frac{1}{2} F_{CC}(dC)^2 + F_{SC}(dC dS) \right\}$$

En utilisant les propriétés du calcul stochastique, les termes intermédiaires suivants peuvent être déterminés :

$$F_S(dS) = (\mu - C)SF_S dt + \sigma_S SF_S dz_S$$

$$F_C(dC) = \kappa(\alpha - C)F_C dt + \sigma_C F_C dz_C$$

$$\frac{1}{2} F_{SS} (dS)^2 = \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} dt$$

$$\frac{1}{2} F_{CC} (dC)^2 = \frac{1}{2} \sigma_C^2 F_{CC} dt$$

$$F_{SC}(dSdC) = \rho \sigma_S \sigma_C SF_{SC} dt$$

$$F_t dt = -F_t dt$$

En remplaçant ces termes par leur valeur, et en séparant les termes déterministes des termes aléatoires, l'expression du rendement instantané du prix à terme est obtenue :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dF}{F} = \frac{1}{F} & \left\{ \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_C^2 F_{CC} + \rho \sigma_S \sigma_C SF_{SC} + (\mu - C)SF_S + \kappa(\alpha - C)F_C - F_t \right\} dt \\ & + \frac{1}{F} \{ \sigma_S SF_S dz_S + \sigma_C F_C dz_C \} \end{aligned}}$$

Ce qui peut être écrit :

$$dF/F = E(S, C, t, T) dt + Z_1(S, C, t, T)dz_S + Z_2(S, C, t, T) dz_C$$

Le rendement instantané du prix à terme suit un processus stochastique dont l'espérance  $E(S, C, t, T)$  dépend des différents paramètres caractérisant la dynamique des états, et du niveau des variables d'état. Ce rendement est en outre affecté par les composantes aléatoires  $Z_i(S, C, t, T)$ , qui représentent l'impact sur le rendement du prix à terme des perturbations non anticipées sur les variables d'état.

### 1.2.3. Raisonnement d'arbitrage

Dans le modèle MR, le prix à terme est affecté par deux sources d'incertitude : le prix au comptant  $S$  et le *convenience yield*  $C$ . En retenant l'hypothèse posée dans le cadre du modèle BG, l'actif représentant l'incertitude

associée au prix au comptant est un contrat à terme. Cependant, le *convenience yield* ne correspondant à aucun actif réellement échangé, la seule solution envisageable pour se protéger contre l'incertitude qui lui est associée, est de prendre, là encore, une position sur le marché à terme.

Un actif de même nature (un contrat à terme) est donc utilisé pour assurer une protection contre deux sources de risque distinctes, ce qui semble contraire à la condition de non redondance exposée en sous-section 1.1.3 de ce chapitre. Pour pouvoir être considérés comme non redondants, ces deux contrats à terme doivent avoir des échéances suffisamment éloignées l'une de l'autre. Ils doivent de plus être suffisamment échangés pour être considérés comme des « *basic securities* ».

Dans le cadre du modèle MR, le portefeuille de couverture est donc composé de trois positions sur le marché à terme<sup>13</sup>. Soit  $V$  la valeur de ce portefeuille localement non risqué. Celui-ci est composé de la façon suivante :  $w_1$  contrats à terme de maturité  $\tau_1$ ,  $w_2$  contrats à terme de maturité  $\tau_2$ , et  $w_3$  contrats à terme de maturité  $\tau_3$ .

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, il est possible de calculer les proportions  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  de telle sorte que le portefeuille soit de rendement et de risque nuls. Ces proportions peuvent être déterminées en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} w_1 E(S, C, \tau_1) + w_2 E(S, C, \tau_2) + w_3 E(S, C, \tau_3) = 0 \\ w_1 Z_1(S, C, \tau_1) + w_2 Z_1(S, C, \tau_2) + w_3 Z_1(S, C, \tau_3) = 0 \\ w_1 Z_2(S, C, \tau_1) + w_2 Z_2(S, C, \tau_2) + w_3 Z_2(S, C, \tau_3) = 0 \end{cases}$$

Cette résolution permet de mettre en évidence l'existence d'une relation linéaire entre les fonctions  $E$ ,  $Z_1$  et  $Z_2$ , indépendante de la maturité  $\tau$  :

$$E(S, C, \tau) = \lambda_S Z_1(S, C, \tau) + \lambda_C Z_2(S, C, \tau)$$

La prime de terme  $\phi(S, C, \tau)$  du modèle MR est la suivante :

$$\phi(S, C, \tau) = E(S, C, \tau) = \lambda_S \sigma_S S \frac{F_S}{F} + \lambda_C \sigma_C \frac{F_C}{F} \quad (\text{MR2})$$

---

<sup>13</sup> Comme dans le cas du modèle BG, la position sur l'actif sans risque disparaît, car, le dépôt étant négligé, l'investissement nécessaire à l'initiation d'une position sur le marché à terme est considéré comme nul.

Cette prime correspond à la somme des rémunérations offertes à l'équilibre pour le risque associé à chacune des variables d'état.  $\lambda_S$  représente le prix de marché du risque associé au prix au comptant, ou prime de risque unitaire offerte à l'équilibre pour le risque associé au prix au comptant ;  $\lambda_S \sigma_S$  est la rémunération pour le risque associé au prix au comptant : c'est la prime de risque de ce facteur. Le même raisonnement est appliqué pour le *convenience yield*.

La prime de terme est donc une combinaison linéaire des primes de risque associées à chaque facteur sous-jacent, dont les coefficients mesurent la sensibilité du taux de rendement du prix à terme aux variations des états.

#### 1.2.4. Equation fondamentale de valorisation

L'espérance de rendement instantané du prix à terme,  $E(S, C, \tau)$  est remplacée par sa valeur dans l'équation de prime de terme :

$$\frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_C^2 F_{CC} + \rho \sigma_S \sigma_C S F_{SC} + (\mu - C) S F_S + \kappa (\alpha - C) F_C - F_\tau \right\} = \frac{\lambda_S \sigma_S S F_S}{F} + \frac{\lambda_C \sigma_C F_C}{F}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_C^2 F_{CC} + \rho \sigma_S \sigma_C S F_{SC} + (\mu - C - \lambda_S \sigma_S) S F_S + [\kappa (\alpha - C) - \lambda_C \sigma_C] F_C - F_\tau = 0$$

Dans ce modèle, la commodité est considérée comme un actif payant un dividende stochastique  $C$ . La tendance du processus du prix au comptant, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, est  $(\mu - C - \lambda_S \sigma_S)$ , où  $\lambda_S$  est le prix de marché du risque de prix au comptant de la commodité. En supposant que la commodité est un actif échangé, son taux de croissance anticipé peut également être écrit, en univers risque neutre,  $(r - C)$  :

$$(\mu - C - \lambda_S \sigma_S) = (r - C)$$

Le *convenience yield* ne pouvant être considéré comme un actif échangé, l'équation fondamentale de valorisation dépend du comportement par rapport au risque des opérateurs, exprimé par le prix de marché du risque de *convenience yield*,  $\lambda$ , tel que :  $\lambda = \lambda_C \sigma_C$ .

En remplaçant  $(\mu - C - \lambda_S \sigma_S)$  par  $(r - C)$  et  $\lambda_C \sigma_C$  par  $\lambda$ , l'équation fondamentale de valorisation associée au modèle MR devient :

$$\frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_C^2 F_{CC} + \rho \sigma_S \sigma_C S F_{SC} + (r - C) S F_S + [\kappa(\alpha - C) - \lambda] F_C - F_\tau = 0$$

(MR3)

La condition aux bornes associée à cette équation aux dérivées partielle est identique à celle définie pour le modèle BG :

$$F(S, C, T, T) = S(T) \quad (\text{MR4})$$

La solution de cette équation est la suivante<sup>14</sup> :

$$F(S, C, t, T) = S \times \exp[-HC + B[\tau]] \quad (\text{MR5})$$

Avec :

$$H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

$$B[\tau] = \left[ \left( r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_S \sigma_C \rho}{\kappa} \right) \times \tau \right] + \left[ \frac{1}{4} \sigma_C^2 \times \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \right] + \left[ \left( \hat{\alpha} \kappa + \sigma_S \sigma_C \rho - \frac{\sigma_C^2}{\kappa} \right) \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa^2} \right) \right]$$

et  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}.$

### 1.3. MODELE ASYMETRIQUE (AS)

Le modèle asymétrique (AS) est une extension du modèle MR. Il comporte les mêmes variables d'état, et la dynamique du prix au comptant est identique. En revanche, une asymétrie est introduite dans la dynamique du *convenience yield*, de telle sorte que la relation suivante associe le *convenience yield* du modèle MR à celui du modèle AS :

$$\tilde{C}(t) = (1 - \beta)C(t) + \beta \exp(C(t)) \quad (\text{AS1})$$

Avec :  
 -  $\tilde{C}$  : *convenience yield* dans le modèle AS,  
 -  $C$  : *convenience yield* dans le modèle MR.

<sup>14</sup> La résolution du modèle MR est présentée en annexe quatre.



L'asymétrie est représentée par le paramètre  $\beta$ . Lorsque ce dernier est nul, le modèle AS s'identifie au modèle MR. La définition retenue pour le *convenience yield* est celle présentée en conclusion du chapitre deux.

### 1.3.1. Dynamique des états

Compte tenu de la relation exposée ci-dessus, la dynamique des états est exprimée, dans le modèle AS, de la façon suivante<sup>15</sup> :

$$\begin{cases} dS = (\mu - \tilde{C})Sdt + \sigma_S S dz_S \\ d\tilde{C} = \left( \kappa(\alpha - C)(1 - \beta + \beta e^C) + \frac{1}{2} \beta e^C \sigma_C^2 \right) dt + (1 - \beta + \beta e^C) \sigma_C dz_C \end{cases} \quad (\text{AS2})$$

Avec :

$$E[dz_S \times dz_C] = \rho dt$$

$$\kappa, \sigma_S, \sigma_C > 0$$

- où :
- $S$  est le prix au comptant,
  - $\tilde{C}$  est le *convenience yield* du modèle AS,
  - $C$  est le *convenience yield* du modèle MR,
  - $\beta$  est le degré d'asymétrie de  $\tilde{C}$ .

Dans ce modèle comme dans le précédent, le *convenience yield* n'est plus une fonction déterministe du prix au comptant. De même, la représentation de la dynamique du *convenience yield* par un processus de retour vers une valeur moyenne est expliquée, comme dans le cadre du modèle MR, par le comportement de stockage des opérateurs.

En revanche, dans le modèle AS, la dynamique du *convenience yield* est asymétrique<sup>16</sup> : lorsque cette variable d'état atteint un niveau élevé, sa volatilité est plus importante. Ce choix peut être expliqué de la façon suivante. En premier lieu,

---

<sup>15</sup> Pour des raisons de simplicité, et parce que ne cela nuisait pas à la portée de ces travaux, un mouvement brownien standard unique a été utilisé pour représenter la dynamique de  $\tilde{C}$ . De plus, cette dynamique a été obtenue en appliquant le lemme d'Itô à la relation (AS1) (annexe cinq).

<sup>16</sup> Ce type d'approche a été également utilisé par Brennan (1991), et par Routledge, Seppi, et Spatt (1999). Brennan suppose cependant, dans son modèle, que le *convenience yield* n'est pas stochastique. De plus, l'asymétrie du comportement du *convenience yield* est représentée, dans le modèle de Routledge, Seppi et Spatt, par une corrélation entre le prix au comptant et le *convenience*

dans ce modèle comme dans les précédents, les raisons expliquant l'introduction d'une volatilité du prix au comptant proportionnelle au niveau du prix au comptant sont également valables pour justifier l'introduction d'une volatilité du *convenience yield* proportionnelle à son niveau. Lorsque les stocks sont rares, toute modification de la demande de commodité a un impact plus important sur les prix au comptant, les stocks n'étant pas suffisamment abondants pour amortir les fluctuations de prix. Les prix au comptant fluctuant plus fortement, le bénéfice retiré de la vente ou de la transformation de stocks suit la même évolution. La volatilité du *convenience yield* augmente de ce fait.

En second lieu, lorsque les stocks sont rares, c'est-à-dire lorsque l'ajustement entre les opérations de production, de transport et de transformation de la commodité n'est plus aussi bien assuré que dans les conditions de fonctionnement « normales » du marché, le rendement de réserve associé aux stocks (en retenant la terminologie de Weymar<sup>17</sup>), inexistant en d'autres circonstances, peut prendre des valeurs très élevées dès qu'un incident vient menacer la continuité des opérations de production, de transport, et de transformation. Une fois résolues les difficultés nées de cet incident, le rendement de réserve redevient nul. Cette composante du *convenience yield* varie donc en fonction de la capacité des opérateurs à faire face, à chaque instant, à l'imprévu. Pour cette seconde raison, dans ces circonstances, le *convenience yield* est plus volatile.

### 1.3.2. Equation fondamentale de valorisation

Un raisonnement identique à celui proposé pour le modèle MR permet d'obtenir l'équation fondamentale de valorisation du modèle AS<sup>18</sup> :

---

*yield* plus importante en situation de déport qu'en situation de report. Dans ce cas, le *convenience yield* est une variable endogène, déterminée par le processus de stockage.

<sup>17</sup> Weymar, 1968. La notion de rendement de réserve est exposée au chapitre deux.

<sup>18</sup> L'obtention de cette équation est présentée en détail en annexe cinq.

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 (1 - \beta + \beta e^c)^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + \rho \sigma_s \sigma_c S (1 - \beta + \beta e^c) F_{s\tilde{c}} + (r - \tilde{C}) S F_s \\ & + \left[ \kappa (1 - \beta + \beta e^c) (\hat{\alpha} - C) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \beta e^c \right] F_{\tilde{c}} - F_{\tau} = 0 \end{aligned}} \quad (\text{AS3})$$

Avec, comme précédemment,  $\lambda = \lambda_c \sigma_c$  et  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$ .

Là encore, la condition aux bornes associée à cette équation est :

$$F(S, C, T, T) = S(T) \quad (\text{AS4})$$

Pour ce modèle, seule une solution semi-analytique a pu être obtenue. Cette solution est la suivante<sup>19</sup> :

$$\boxed{F(t, T) = S(t) \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C(t)) \times E_t^Q \left[ \exp \left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T (\exp D(v) + B(v)) dv \right) \right]} \quad (\text{AS5})$$

Avec :

$$H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}, \quad \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}, \quad A(\tau) = \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \tau + \hat{\alpha} (1 - \beta) (H - \tau) \right)$$

$$B(v) = \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y), \quad D(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) e^{-\kappa(v-t)}$$

Compte tenu du caractère semi-analytique de cette solution, la détermination des prix à terme théoriques associés au modèle asymétrique nécessite le calcul numérique de l'espérance insérée dans l'équation (AS5).

## SECTION 2. SIMULATIONS

Cette seconde section a pour objectif de montrer comment les prix à terme théoriques obtenus à partir d'un modèle varient lorsque les valeurs des paramètres ou

---

<sup>19</sup> Cette résolution est présentée en annexe cinq.

le niveau des variables d'état de ce modèle sont modifiées et de comparer les résultats obtenus pour chaque modèle.

Le modèle BG est construit à partir d'une variable d'état, le prix au comptant  $S$ , et de deux paramètres : le taux d'intérêt  $r$  et le *convenience yield*  $c$ . Le modèle MR comprend une variable d'état supplémentaire, le *convenience yield*  $C$ , et sept paramètres : le taux d'intérêt  $r$ , la moyenne à long terme du *convenience yield*,  $\alpha$ , la force de rappel agissant sur le *convenience yield*,  $\kappa$ , la volatilité du prix au comptant,  $\sigma_S$ , la volatilité du *convenience yield*,  $\sigma_C$ , la corrélation entre les mouvements browniens standards des deux variables d'état,  $\rho$ , et le prix de marché du risque associé au *convenience yield*,  $\lambda$ . Enfin, le modèle AS comporte un paramètre supplémentaire : le degré d'asymétrie introduit dans la dynamique du *convenience yield*,  $\beta$ .

Les valeurs des variables d'état et des paramètres utilisées pour les simulations varient entre deux extrêmes, choisies en s'inspirant des paramètres obtenus par Schwartz (1997) sur le marché du pétrole brut :

**Tableau 4.1 : Valeurs des paramètres et des variables d'état utilisées pour les simulations**

	S	C	r	$\alpha$	$\kappa$	$\sigma_S$	$\sigma_C$	$\rho$	$\lambda$	$\beta$
Minimum	12	-0,3	0,02	-0,1	0,5	0,1	0,3	0	-1	0
Maximum	20	0,2	0,06	0,1	2	0,5	0,7	1	1	1

Ces simulations sont réalisées en supposant que toutes les combinaisons de valeurs pour ces variables et ces paramètres peuvent être envisagées.

## 2.1. MODELE BG

Le prix théorique obtenu à partir du modèle BG est le suivant :

$$F(S, t, T) = Se^{(r-c)\tau} \quad (\text{BG6})$$

Dans ce modèle, le niveau relatif des deux paramètres, le taux d'intérêt  $r$  et le *convenience yield*  $c$ , a une influence directe sur l'ensemble de la structure par terme des prix : lorsque le taux d'intérêt est supérieur au *convenience yield*, toute la structure par terme des prix est en report. Dans le cas inverse, elle est en déport.

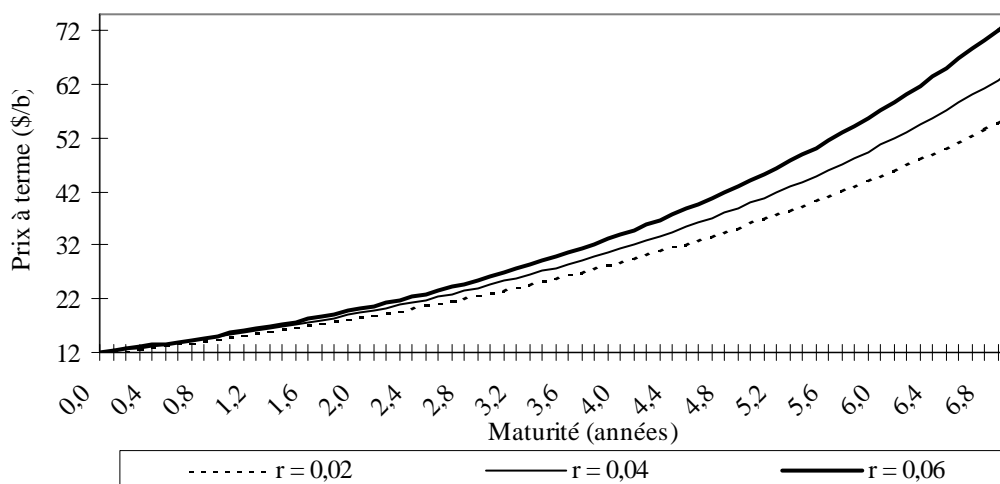
### 2.1.1. Sensibilité aux variations du taux d'intérêt

L'analyse de la sensibilité du modèle BG aux variations du taux d'intérêt montre que pour une structure par terme initialement en report ( $r-c > 0$ ), une augmentation du taux d'intérêt accentue, toutes choses égales par ailleurs, cette situation de report. L'impact de la variation du taux d'intérêt est d'autant plus prononcé que la maturité considérée est éloignée.

Lorsque la structure par terme des prix est initialement en situation de déport, et que le taux d'intérêt augmente, ce déport se maintient tant que  $r$  reste inférieur à  $c$ , mais il est d'autant moins prononcé que le taux d'intérêt est élevé.

**Figure 4.1 : Modèle BG, impact d'une variation du taux d'intérêt**

$$S = 12 ; c = -0,2$$

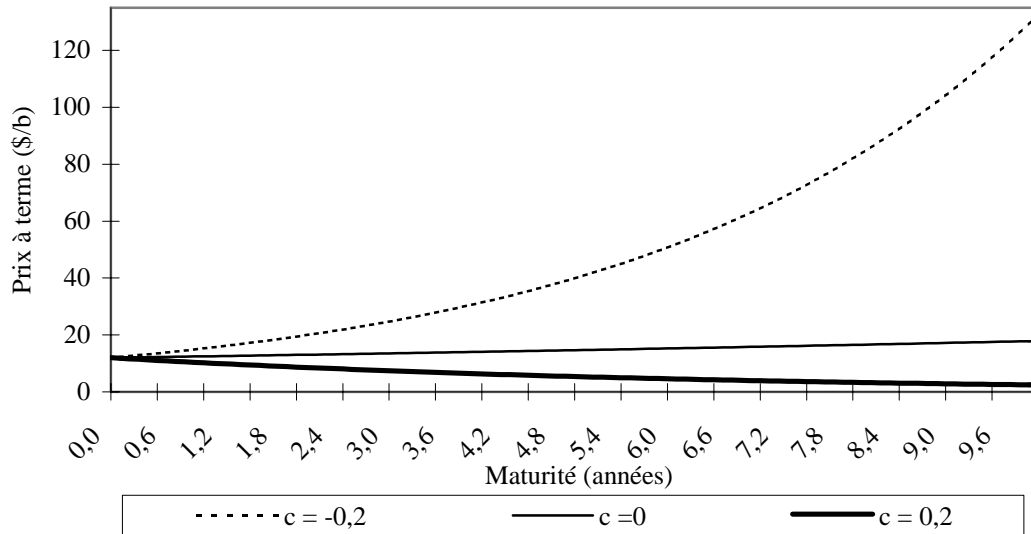


### 2.1.2. Sensibilité aux variations du convenience yield

Lorsque le taux d'intérêt est supérieur au *convenience yield* (cas où  $c = -0.2$  dans l'exemple ci-dessous) la structure par terme des prix est en report. Ce report est d'autant plus prononcé que la maturité est éloignée et que, toutes choses égales par ailleurs, la valeur du *convenience yield* diminue.

**Figure 4.2 : Modèle BG, impact d'une variation du convenience yield**

$$S = 12 ; r = 0,04$$



En revanche, lorsque le taux d'intérêt devient inférieur au *convenience yield*, une augmentation de  $c$  a pour effet d'accentuer la situation de déport sur l'ensemble de la structure par terme des prix. Ces derniers tendent plus rapidement vers zéro.

### 2.1.3. Conclusion

Les représentations graphiques obtenues à partir des simulations illustrent l'un des inconvénients majeurs d'un modèle monofactoriel : le niveau relatif du taux d'intérêt et du *convenience yield* déterminant la forme de l'ensemble de la structure par terme des prix, ce modèle ne peut représenter que des courbes de prix monotones croissantes, monotones décroissantes, ou stables. Le taux de variation du prix à terme, dans ce modèle, est en effet une constante :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \tau} = r - c$$

Si  $(r - c)$  est positif, la structure par terme est en report, et la valeur du prix à terme tend vers l'infini avec la maturité :

$$\text{Report : } (r - c) > 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} F(S, t, T) = \infty$$

A l'inverse, si  $(r - c)$  est négatif, la structure par terme est en déport, et la limite vers laquelle tend le prix à terme lorsque la maturité augmente est nulle :

$$\text{Déport : } (r - c) < 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} F(S, t, T) = 0$$

Enfin, lorsque la différence  $(r - c)$  est nulle, le prix à terme tend vers le prix au comptant lorsque la maturité tend vers l'infini :

$$(r - c) = 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} F(S, t, T) = S$$

Le modèle développé par Brennan et Schwartz en 1985 ne permet donc pas, à moins de considérer un horizon d'analyse à court terme, de représenter de façon satisfaisante la structure par terme des prix dans un marché de commodités tel que celui du pétrole brut : en premier lieu, comme l'illustrent les figures 4.1 et 4.2, les valeurs atteintes par le prix à terme pour des échéances très éloignées n'ont pas de signification sur le plan économique. Ensuite, ce modèle ne prend pas en considération la possibilité que la courbe des prix décrive des mouvements autres que des translations. Enfin, il considère le *convenience yield* net des coûts de stockage comme une constante, ce que contredisent les travaux réalisés ultérieurement dans ce domaine. Le modèle BG n'est donc adapté qu'à des catégories bien spécifiées de commodités, pour lesquelles le *convenience yield* joue un rôle marginal : c'est le cas par exemple des métaux précieux, pour lesquels le volume des stocks est considérable, ces derniers constituant des réserves de valeur plutôt que les intrants d'un processus de production.

Dernier inconvénient présenté par ce modèle : il suppose que le prix au comptant est la seule variable explicative du comportement des prix à terme. Ceci implique que les rendements des prix à terme pour différentes maturités sont parfaitement corrélés. Dans le modèle BG, la volatilité des rendements des prix à terme est identique quelle que soit la maturité considérée :

$$dF = \left[ F_t + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{ss} + (r - C) S F_s \right] dt + \sigma_s S F_s dz_s$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{dF}{F} = \sigma_s dz_s$$

Or, les constatations empiriques contredisent nettement cette proposition : les rendements des prix à terme observés sont d'autant moins volatils que l'échéance est éloignée.

## 2.2. MODELE MR

Le prix théorique obtenu à partir du modèle MR est le suivant :

$$F(S, C, t, T) = S \times \exp \left[ -C \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B[\tau] \right] \quad (\text{MR5})$$

Avec :

$$B[\tau] = \left[ \left( r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_S \sigma_C \rho}{\kappa} \right) \times \tau \right] + \left[ \frac{1}{4} \sigma_C^2 \times \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \right] + \left[ \left( \hat{\alpha} \kappa + \sigma_S \sigma_C \rho - \frac{\sigma_C^2}{\kappa} \right) \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa^2} \right) \right]$$

et  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}.$

Ce modèle comporte deux variables d'état, le prix au comptant  $S$  et le *convenience yield*  $C$ , et sept paramètres. Compte tenu un nombre important de paramètres, et de l'expression relativement complexe du prix à terme, seuls les cas pour lesquels une interprétation simple peut être avancée sont étudiés.

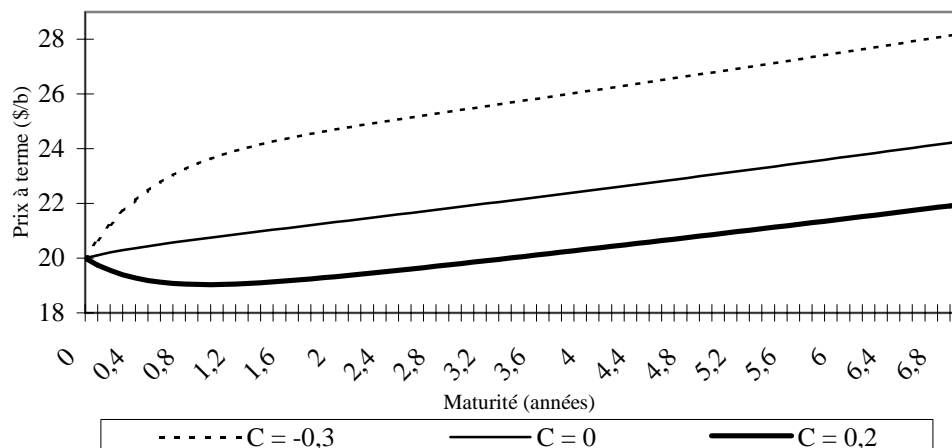
### 2.2.1. Structures par terme des prix pour différents niveaux de *convenience yield*

La simulation des structures par terme pour différents niveaux de *convenience yield* permet en premier lieu de remarquer la variété des courbes obtenues à partir du modèle MR (figure 4.3) : celles-ci peuvent avoir une forme de cuvette ( $C = 0.2$ ), de bosse ( $C = -0.3$ ), ou encore être stables ( $C = 0$ ).

**Figure 4.3 : Modèle MR, impact d'une variation du *convenience yield***

$$S = 20 ; r = 0,06 ; \alpha = 0 ; \kappa = 2 ; \rho = 0,9 ; \sigma_S = 0,3 ; \sigma_C = 0,4 ; \lambda = 0$$





La simulation permet également de montrer que dans le modèle MR, l'impact d'une variation de  $C$  sur la forme de la structure par terme des prix est une fonction de l'écart entre le niveau du *convenience yield* et sa valeur moyenne à long terme  $\alpha$  : plus  $C$  est éloigné de  $\alpha$  ( $C = -0,3$ ) plus il tarde à revenir vers cette valeur, et plus la maturité pour laquelle la courbe se stabilise s'éloigne. Si ce phénomène n'apparaît pas de façon très marquée sur la figure 4.3, l'étude des prix à terme théoriques obtenus à partir du modèle MR (tableau 4.2) montre en revanche que le taux de variation du prix à terme se stabilise pour une maturité de 1,8 an lorsque  $C = \alpha = 0$ . Cette stabilisation ne se manifeste qu'à partir de 3,4 ans pour la valeur de  $C$  la plus éloignée de  $\alpha$ , lorsque  $C = -0,3$ .

**Tableau 4.2. : Rapidité de la stabilisation de la courbe des prix en fonction de l'écart entre  $C$  et  $\alpha$**

$S = 20$  ;  $r = 0,06$  ;  $\alpha = 0$  ;  $\kappa = 2$  ;  $\rho = 0,9$  ;  $\sigma_S = 0,3$  ;  $\sigma_C = 0,4$  ;  $\lambda = 0$

	C = -0,3		C = 0		C = 0,2	
Maturité (années)	Prix à terme	Variation du prix à terme (%)	Prix à terme	Variation du prix à terme (%)	Prix à terme	Variation du prix à terme (%)
0,1	20,66	3,32	20,11	0,55	19,93	-0,35
0,6	22,77	1,34	20,51	0,33	19,80	0,00
1	23,63	0,74	20,75	0,29	19,87	0,14
1,4	24,16	0,47	20,98	0,27	20,02	0,20
1,6	24,36	0,40	21,10	0,27	20,11	0,22
<b>1,8</b>	24,54	0,36	21,21	<b>0,26</b>	20,20	0,23
<b>2,6</b>	25,14	0,28	21,66	0,26	20,61	<b>0,26</b>

3	25,42	0,27	21,88	0,26	20,82	0,26
3,2	25,55	0,27	22,00	0,26	20,93	0,26
<b>3,4</b>	25,69	<b>0,26</b>	22,11	0,26	21,03	0,26
5	26,78	0,26	23,05	0,26	21,93	0,26

Enfin, dans le modèle MR, le niveau des prix à terme est une fonction décroissante du niveau du *convenience yield*. La dérivée de F par rapport à C est en effet négative :

$$F_C = -S \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right) \times \exp \left[ -C \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B(\tau) \right]$$

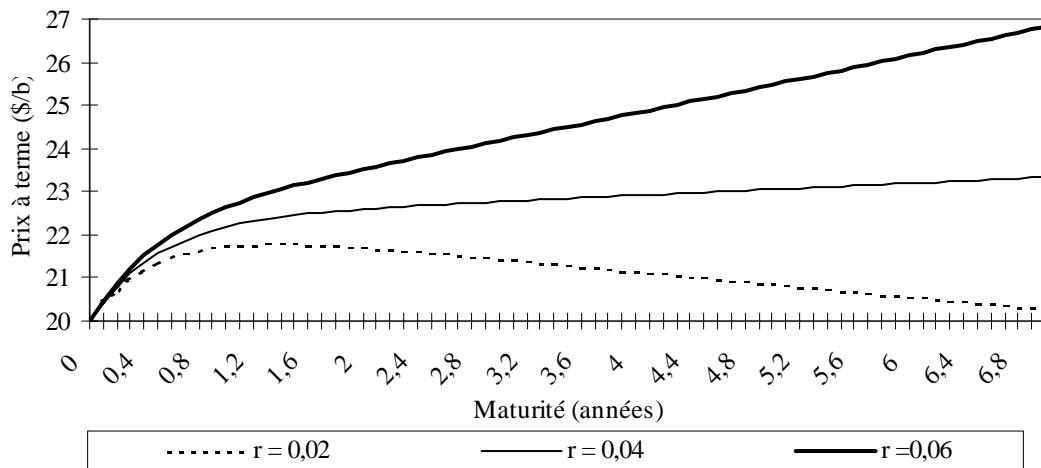
Plus le niveau du *convenience yield* est élevé, plus celui des prix à terme diminue.

### 2.2.2. Sensibilité aux variations du taux d'intérêt

La figure 4.4 permet d'observer comment les structures par terme de prix sont modifiées lorsque le taux d'intérêt  $r$  varie. Dans le modèle MR, l'impact d'une augmentation du taux d'intérêt ne se limite pas, comme dans le modèle BG, à une accentuation de la situation de report : lorsque le taux d'intérêt croît, les prix à terme pour une échéance éloignée, en déport dans le cas présenté ci-dessous, passent en report, et ce d'autant plus rapidement et fortement que l'augmentation du taux d'intérêt est prononcée.

**Figure 4.4 : Modèle MR, impact d'une variation du taux d'intérêt**

$$S = 20 ; C = -0,2 ; \alpha = 0 ; \kappa = 2 ; \rho = 0,9 ; \sigma_S = 0,3 ; \sigma_C = 0,4 ; \lambda = 0$$



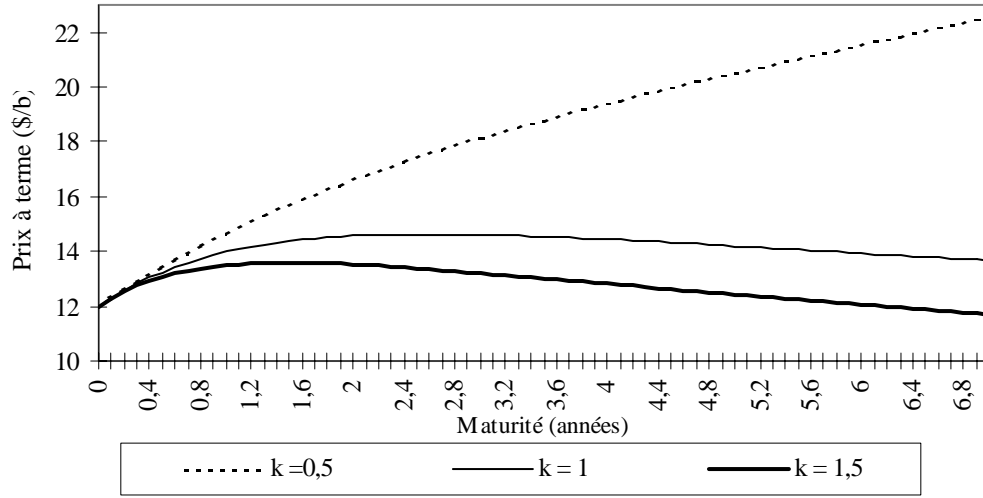
Pour une situation de déport sur les échéances rapprochées, les résultats obtenus à partir de la simulation du modèle MR sont proches de ceux présentés ci-dessus. Lorsque le taux d'intérêt est faible ( $r = 0,02$ ), la structure par terme est en déport sur toutes les échéances. Le déport sur les échéances éloignées se transforme en un report lorsque le taux d'intérêt augmente, ce report étant d'autant plus prononcé que le taux d'intérêt est élevé.

### 2.2.3. Sensibilité aux variations de la force de rappel $\kappa$

L'exemple présenté en figure 4.5 permet de montrer que plus la force de rappel  $\kappa$  est faible, plus le taux de variation du prix à terme augmente : le report est particulièrement prononcé pour les échéances éloignées lorsque  $\kappa$  tend vers zéro. Inversement, plus ce paramètre est élevé et plus le taux de variation du prix à terme diminue lorsque l'échéance considérée s'éloigne : le report sur les échéances rapprochées représentées en figure 4.5 se transforme en un déport.

**Figure 4.5 : Modèle MR, impact d'une variation de la force de rappel**

$$S = 12 ; C = -0,2 ; r = 0,06 ; \alpha = 0,1 ; \rho = 0 ; \sigma_S = 0,1 ; \sigma_C = 0,2 ; \lambda = 0$$



Enfin, pour les échéances rapprochées, la forme de la structure par terme des prix est particulièrement sensible aux niveaux du *convenience yield* et de la force de rappel

$$\kappa : \quad \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{1}{F} \left[ S \times (-C e^{-\kappa \tau} + B_\tau) \times \exp \left( -C \frac{1 - e^{-\kappa \tau}}{\kappa} + B(\tau) \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T} = -C e^{-\kappa \tau} + B_\tau}$$

$$\text{Avec : } B_\tau = \left( r - \hat{\alpha} + \frac{\sigma_s^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_s \sigma_c \rho}{\kappa} \right) + \frac{\sigma_c^2 e^{-2\kappa \tau}}{2\kappa^2} + \left( \hat{\alpha} \kappa + \sigma_s \sigma_c \rho - \frac{\sigma_c^2}{\kappa} \right) \times \frac{e^{-\kappa \tau}}{\kappa}$$

Lorsque la maturité augmente et tend vers l'infini, le taux de variation du prix à terme tend vers une constante indépendante du niveau de C :

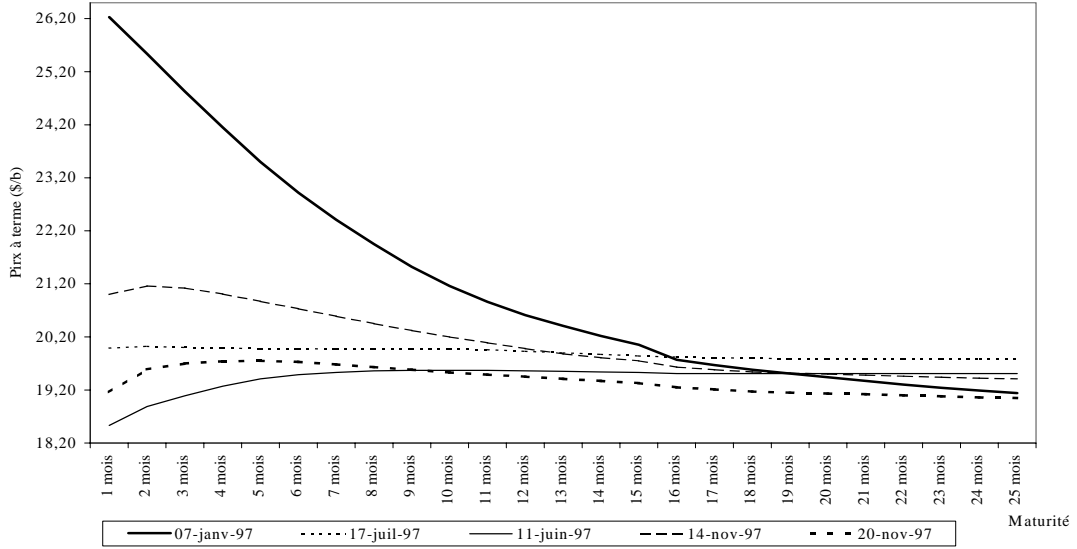
$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \tau} \right) = r - \alpha + \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{\sigma_c^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_s \sigma_c \rho}{\kappa}$$

#### 2.2.4. Conclusion

Le modèle à deux facteurs proposé par Schwartz offre une représentation satisfaisante de la réalité : il permet en effet de représenter des structures par terme beaucoup plus variées que ne l'autorise le modèle BG. Les courbes obtenues pour des échéances éloignées sont plus proches de celles observées empiriquement. La

figure 4.6, établie à partir de données de prix du contrat WTI du NYMEX, présente quelques exemples de structures par terme des prix du pétrole brut :

**Figure 4.6 : WTI, exemples de structures par terme de prix observées**



De plus, à la différence du modèle BG, la structure par terme des volatilités des prix à terme n'est plus plate<sup>20</sup> :

$$\sigma_F(\tau) = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_C^2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right)^2 - \left[ 2 \times \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \times \rho \sigma_S \sigma_C \right]} \quad (\text{MR14})$$

La volatilité des rendements des prix à terme décroît avec la maturité. En revanche, lorsque le contrat approche de son échéance ( $\tau \rightarrow 0$ ), la volatilité des rendements des prix à terme converge vers celle du prix au comptant. Enfin, lorsque l'échéance approche de l'infini, la variance des rendements des prix à terme converge vers une valeur fixe :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_F^2 = \sigma_S^2 + \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} - \frac{2\rho\sigma_S\sigma_C}{\kappa} \quad (\text{MR15})$$

Dans ce modèle, la corrélation entre les rendements des prix à terme n'est plus supposée parfaite. Le réalisme du modèle est accru. Cette amélioration est

<sup>20</sup> La volatilité des rendements du prix à terme, dans le modèle MR, est obtenue en appliquant le lemme d'Itô à la solution du modèle. La façon dont l'expression (MR14) est déterminée est détaillée en annexe quatre, paragraphe deux.

cependant obtenue aux prix d'un accroissement de la complexité du modèle : pour obtenir les prix à terme théoriques à partir du modèle MR, il faut en effet estimer non plus deux paramètres, mais sept.

Les divergences entre les structures par termes des prix obtenues à partir de modèles BG et MR sont d'autant plus importantes que le niveau du *convenience yield* est élevé, que celui est éloigné de sa valeur moyenne à long terme  $\alpha$ , et que la force de rappel  $\kappa$  est forte. Lorsque le *convenience yield* augmente, dans le modèle BG, aucune force ne le ramène vers sa valeur moyenne à long terme, et l'ensemble de la structure par terme des prix en est affectée. En revanche, dans le modèle MR, l'effet d'un *convenience yield* élevé s'atténue au fur et à mesure que la maturité considérée s'éloigne, et ce d'autant plus rapidement que la force de rappel  $\kappa$  est élevée.

## 2.3. MODELE AS

Les simulations réalisées à partir du modèle AS sont centrées sur l'étude de l'asymétrie introduite dans la dynamique du *convenience yield*. En l'absence de solution analytique pour ce modèle, les prix à terme théoriques doivent être calculés en calculant numériquement l'espérance intégrée dans la solution (AS5)<sup>21</sup>.

### 2.3.1. Dynamique du *convenience yield*

La dynamique du *convenience yield*, dans le modèle AS, est exprimée de la façon suivante :

$$d\tilde{C} = \left( \kappa(\alpha - C)(1 - \beta(1 - C_1)) + \frac{1}{2}\beta C_1 \sigma_C^2 \right) dt + (1 - \beta(1 - C_1))\sigma_C dz_C \quad (\text{AS2-2})$$

Cette dynamique présente deux caractéristiques<sup>22</sup> : en premier lieu, comme dans le modèle MR, le *convenience yield* a tendance à revenir vers sa valeur moyenne à long terme (figure 4.7).

<sup>21</sup> Annexe cinq.

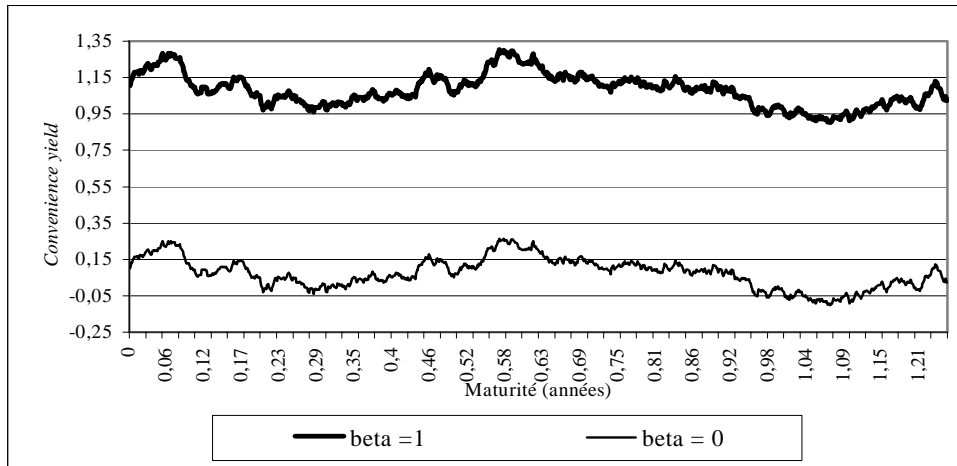
<sup>22</sup> La dynamique du *convenience yield* est représentée à l'aide d'une simulation Monte-Carlo, en utilisant un schéma d'Euler pour la discrétisation du processus. Cette méthode est présentée en annexe cinq.

**Figure 4.7 Dynamique du convenience yield lorsque  $\beta = 1$  et lorsque  $\beta = 0$**

$C(t_0) = 0,1$  ;  $\kappa = 2$  ;  $\alpha = 0$  ;  $\sigma_C = 0,3$  ; maturité : 1,25 an

Nombre de trajectoires simulées : 800 ; Nombre d'intervalles de discrétisation : 1000

Longueur du pas de discrétisation : 1/800



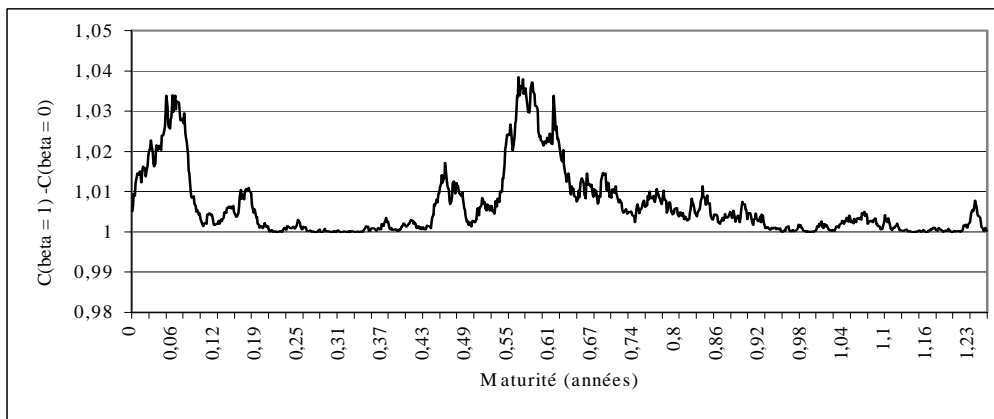
Ensuite, comme l'illustre la figure 4.8, la volatilité du *convenience yield* est proportionnelle à son niveau, cette asymétrie étant d'autant plus prononcée que le coefficient d'asymétrie  $\beta$  est élevé.

**Figure 4.8. Ecart entre convenience yields lorsque  $\beta = 1$  et  $\beta = 0$**

$C(t_0) = 0,1$  ;  $\kappa = 2$  ;  $\alpha = 0$  ;  $\sigma_C = 0,3$  ; maturité : 1,25 an

Nombre de trajectoires simulées : 800 ; Nombre d'intervalles de discrétisation : 1000

Longueur du pas de discrétisation : 1/800



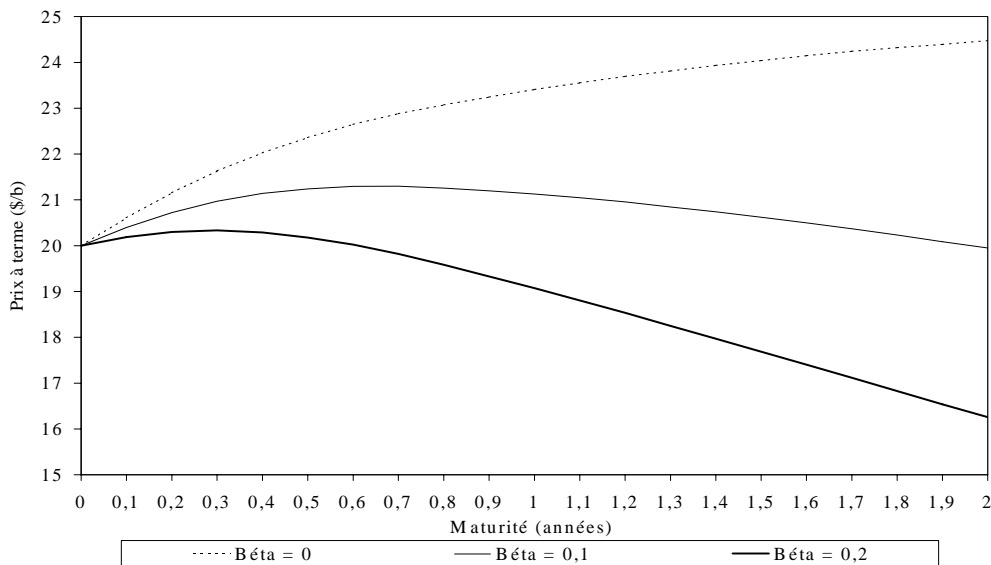
### 2.3.2. Impact d'une variation du coefficient d'asymétrie

Comme la figure 4.7 permet de le mettre en évidence, pour un jeu de paramètres identiques, le *convenience yield* du modèle AS est supérieur à celui du modèle MR, l'écart entre ces deux variables étant proportionnel à la valeur du

coefficient d'asymétrie. Or, dans le modèle AS et dans le modèle MR, le *convenience yield* intervient dans la dynamique du prix au comptant comme un dividende stochastique. Par conséquent, sachant que dans ce modèle, le prix à terme correspond à l'espérance du prix au comptant, plus le coefficient d'asymétrie est élevé, et plus le prix à terme diminue, toutes choses égales par ailleurs.

**Figure 4.9. Modèle AS, impact d'une variation du coefficient d'asymétrie<sup>23</sup>**

$$S = 20 ; C = -0,3 ; r = 0,06 ; \alpha = 0 ; \rho = 0,9 ; \sigma_S = 0,3 ; \sigma_C = 0,4 ; \kappa = 2$$



### 2.3.3. Conclusion

La similarité des modèles AS et MR implique que les principaux résultats des simulations réalisées à partir du modèle MR sont également valables pour le modèle AS. En particulier, les structures par terme simulées à partir des modèles MR et AS possèdent des caractéristiques communes : elles peuvent avoir une forme de cuvette, de bosse, ou encore être stables.

Deux éléments séparent cependant ces modèles l'un de l'autre. Le premier est de nature théorique : le modèle AS intègre une asymétrie dans le comportement du *convenience yield*, que le modèle MR ignore. Le second élément est d'ordre pratique : le modèle MR possède une solution analytique et comporte un paramètre

<sup>23</sup> Les prix à terme sont simulés en utilisant la méthode présentée en annexe cinq. 500 simulations sont réalisées pour chaque prix à terme.



de moins que le modèle AS. L'utilisation du modèle MR est donc bien plus simple que ne l'est celle du modèle AS.

### SECTION 3. CONCLUSION

La comparaison des trois modèles de structure par terme des prix des commodités présentés dans ce chapitre permet d'aboutir à certaines conclusions utiles pour les études empiriques envisagées dans le cadre de cette thèse. En premier lieu, les simulations effectuées à l'aide du modèle BG illustrent le fait que ce dernier n'est pas réellement adapté à la représentation de la structure par terme des prix d'une commodité industrielle stockable telle que le pétrole brut. L'étude empirique des performances des modèles de structure par terme des prix des commodités (chapitre cinq) sera donc centrée sur les modèles MR et AS, dans le but de tester la validité de l'hypothèse d'asymétrie du *convenience yield*.

Cette orientation des études empiriques permet de se contenter d'un cadre d'analyse relativement restreint pour la troisième partie de cette thèse : les taux d'intérêt sont supposés constants, et les prix sont sensés avoir un comportement relativement régulier. Si l'hypothèse d'asymétrie du *convenience yield* est vérifiée, l'un des prolongements naturels de ces travaux sera d'envisager, pour le modèle AS, le cas de taux d'intérêt stochastiques et l'introduction de processus de saut dans la dynamique des prix.

Enfin, ces modèles comportent une autre limite théorique : ils supposent que l'on se situe dans le cadre de marchés complets, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, ce qui n'est pas le cas. Ces hypothèses constituent cependant le seul moyen connu pour valoriser les prix à terme.

Pour ces modèles, une méthode spécifique de reconstitution de séries de données non observables doit être mise au point. Compte tenu des simulations réalisées à partir de la dynamique de  $C$  et de  $C$  tilde, qui montrent en particulier que le convenience yield d'autant plus élevé, dans le modèle asymétrique, que l'asymétrie est élevée, il est dès à présent prévisible que ces séries de données seront différentes les unes des autres.

Les modèles étudiés comportent une limite sur le plan théorique : ils supposent que l'on se trouve en situation de marchés complets, ce qui n'est pourtant pas le cas. Ces hypothèses permettent cependant d'aboutir à des formules de prix qu'il est possible d'utiliser de façon relativement simple.

En second lieu, ces modèles supposent que les taux d'intérêt sont constants, ce qui se révèle être d'autant plus limitant que l'analyse considérée se situe à long terme. Si l'hypothèse de comportement asymétrique du convenience yield se trouve être vérifiée, l'un des prolongements naturels de l'analyse serait d'envisager, comme dans le cas du modèle MR, une extension du modèle en situation de taux d'intérêt stochastiques.

Enfin, on suppose que les prix ont un comportement peu erratique, qu'aucune crise ne venant bouleverser leur comportement ne peut survenir, ce qui constitue là encore une première étape de travail.

## CONCLUSION

Lors de l'élaboration d'un modèle d'équilibre partiel de structure par terme des prix des commodités, les théories traditionnelles des prix des commodités guident le choix des variables d'état et l'identification de la dynamique de ces dernières. Ces variables correspondent en effet, dans la grande majorité des modèles étudiés, aux principaux éléments explicatifs de la base exposés en première partie de cette thèse : le prix au comptant, le *convenience yield*, et le taux d'intérêt.

En retour, les modèles de structure par terme des prix des commodités permettent de tester de nouvelles hypothèses et d'apporter de nouveaux éléments de compréhension du mécanisme de formation des prix dans un marché à terme de commodités. En particulier, les modèles de valorisation relative ont mis en évidence le fait que le *convenience yield* ne peut être exprimé comme une fonction déterministe du prix au comptant. Par ailleurs, la prise en considération du comportement d'ajustement des opérateurs du marché physique aux variations du prix au comptant et les études empiriques effectuées dans le cadre des modèles de structure par terme des prix des commodités ont permis de montrer que le comportement dynamique du prix au comptant et du *convenience yield* peut être représenté par un processus de retour vers une valeur moyenne.

Par rapport à la première partie de cette thèse, deux questions restent cependant ouvertes : en premier lieu, les études empiriques effectuées à ce jour considèrent toutes la prime de risque associée au prix au comptant comme constante. Les difficultés liées à l'analyse d'une prime de risque variable dans le temps n'ont donc pas été abordées dans le cadre des modèles de structure par terme des prix des commodités. Ensuite, l'existence d'une prime de risque associée au prix au comptant n'a ni été mise en évidence ni rejetée de façon catégorique, de telle sorte que la validité de la théorie du déport normal n'a pu, une fois de plus, être établie.

La revue de la littérature effectuée au chapitre trois permet de remarquer qu'une caractéristique de la relation entre prix au comptant et prix à terme a été jusqu'à présent négligée dans l'analyse de la structure par terme des prix des commodités : l'asymétrie entre les situations de report et de déport, et par conséquent l'asymétrie du comportement du *convenience yield*. Cette observation conduit à l'élaboration d'un modèle dans lequel le *convenience yield* a un comportement asymétrique (chapitre quatre). C'est sur cette hypothèse d'asymétrie du *convenience yield* que portent une partie des études empiriques réalisées en troisième partie de cette thèse, à travers la comparaison de deux modèles choisis pour leur capacité à représenter de façon satisfaisante la structure par terme des prix d'une commodité industrielle stockable telle que le pétrole brut.

***TROISIÈME PARTIE :***

***APPLICATIONS AU MARCHÉ DU  
PÉTROLE BRUT***

## INTRODUCTION

Les modèles étudiés en seconde partie de cette thèse sont appliqués au marché du pétrole brut. Dans le chapitre cinq, l'hypothèse d'asymétrie du *convenience yield* est testée en comparant les performances respectives de deux modèles de structure par terme des prix des commodités. Le premier de ces modèles (MR) a été proposé par Schwartz en 1997. L'hypothèse centrale sur laquelle il repose est que le prix à terme d'une commodité dépend de deux variables d'état ayant un comportement de retour vers une valeur moyenne : le prix au comptant de la commodité, et le *convenience yield* associé à la détention de stocks. Le second modèle (AS) est une version généralisée du précédent. Il introduit une asymétrie dans le comportement du *convenience yield*.

Les performances de ces deux modèles sont testées sur le marché du pétrole brut, à partir de données du NYMEX pour le contrat WTI, du 1<sup>er</sup> avril 1991 au 16 novembre 1998. La principale difficulté rencontrée lors de l'estimation de ces modèles tient au caractère non observable des variables d'état. La méthode du filtre de Kalman est employée pour reconstituer des séries temporelles pour ces variables ; une procédure d'optimisation lui est associée pour estimer les paramètres. Plus précisément, un filtre de Kalman simple est utilisé dans le cas du modèle MR ; un filtre de Kalman étendu, adapté aux fonctions non linéaires, est élaboré pour le modèle AS. Enfin, la solution du modèle AS n'étant pas purement analytique, les prix à terme de ce modèle sont calculés numériquement.

Le chapitre six est consacré à l'apport des modèles de structure par terme des prix des commodités à l'analyse de projets d'investissement. Dans le chapitre cinq, l'estimation du modèle AS s'est avérée particulièrement délicate. A ce stade de la recherche, elle nécessite en effet deux approximations qui introduisent un biais agissant en défaveur du modèle. Compte tenu du caractère encore provisoire des

résultats obtenus à partir de ce dernier, seuls le modèle MR et le modèle développé par Brennan et Schwartz en 1985 (BG) sont donc retenus pour cette seconde partie des études empiriques, consacrées à l'étude de projets d'investissement. Rappelons que le modèle BG ne comporte qu'une seule variable d'état, le prix au comptant de la commodité, et suppose que ce dernier suit un mouvement brownien géométrique.

Le projet d'investissement considéré est l'exploitation d'un gisement pétrolier, dont les réserves et les coûts d'extraction sont supposés connus. Deux méthodes d'analyse des projets d'investissement sont comparées : la première utilise le critère de la valeur actuelle nette pour décider de l'adoption ou du rejet du projet, la seconde utilise modèles de structure par terme des prix des commodités pour valoriser les flux nets de trésorerie associés au projet, et prend en considération l'option que représente la détention d'un gisement. Cette option réelle est associée à la possibilité de reporter l'exploitation de la ressource, dans l'attente d'une hausse des prix. Elle peut être exercée à tout moment précédant l'expiration des droits d'exploitation.

La comparaison des modèles MR et BG permet d'étudier l'impact sur la valeur de l'option réelle et sur la décision d'investissement de l'hypothèse de comportement de retour vers une valeur moyenne du prix au comptant et du *convenience yield*. Enfin, l'option associée au modèle MR est valorisée en utilisant une méthode de résolution numérique aux directions alternées. Celle-ci autorise la résolution d'une équation aux dérivées partielles en deux phases, malgré la présence d'une dérivée croisée.

## CHAPITRE 5 : ETUDE COMPARATIVE DES PERFORMANCES DU MODELE DE SCHWARTZ ET DU MODELE ASYMETRIQUE

Ce chapitre a pour objectif de tester l'hypothèse d'asymétrie du comportement du *convenience yield* en comparant les performances respectives des modèles MR et AS appliqués au marché du pétrole brut. Celles-ci sont appréciées en fonction de la capacité d'un modèle à représenter les prix à terme observés, dans un premier temps sur la base de données utilisée pour estimer les paramètres, puis en extrapolation, sur des durées de trois et de six mois.

Pour reconstituer les séries de variables non observables de ces modèles et en estimer les paramètres, une méthode similaire à celle utilisée par Schwartz (1997) a été retenue : le filtre de Kalman. Cette méthode, la façon dont elle a été appliquée aux modèles MR et AS, et la procédure d'optimisation employée pour estimer les paramètres des modèles sont exposées en première section de ce chapitre. Un filtre de Kalman simple est utilisé dans le cas du modèle MR ; un filtre de Kalman étendu, adapté aux fonctions non linéaires, est employé pour le modèle AS. La seconde section présente les données utilisées pour les tests empiriques.

Pour estimer les paramètres du modèle AS et reconstituer les séries temporelles qui lui sont associées, deux approximations doivent être effectuées. La troisième section est consacrée à l'étude de l'impact de ces dernières sur les performances du modèle. Ces approximations sont au nombre de deux : en premier lieu, dans le filtre de Kalman étendu, la relation associant les prix à terme et les variables d'état est linéarisée. Cette linéarisation constitue la principale distinction entre le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman simple. Ensuite, dans le cas du modèle AS, en l'absence de solution purement analytique, les prix à terme sont



calculés numériquement. Pour mesurer l'effet de ces approximations, le filtre de Kalman simple, puis le filtre de Kalman étendu, et enfin le filtre de Kalman étendu avec simulations de prix à terme sont appliqués au modèle MR.

La quatrième section porte sur la comparaison des performances des modèles MR et AS. Compte tenu des difficultés rencontrées lors de l'estimation des paramètres du modèle AS, cette comparaison ne constitue à ce jour qu'un résultat d'étape. La dernière section permet de conclure.

## ***SECTION 1. RECONSTITUTION DES SERIES DE DONNEES NON OBSERVABLES ET ESTIMATION DES PARAMETRES***

Pour comparer les performances des modèles MR et AS, il est nécessaire d'estimer les paramètres de ces modèles et de reconstituer les séries de variables d'état qui leur sont associées. Dans cet objectif, un filtre de Kalman, déjà utilisé par Schwartz en 1997, a été employé<sup>1</sup>. Les principes généraux de cette méthode sont exposés (1.1) avant d'expliquer comment elle a été appliquée aux modèles étudiés. Le filtre de Kalman simple, employé dans le cas du modèle MR (1.2), ne peut être appliqué au modèle AS compte tenu du caractère non linéaire de la dynamique des états de ce modèle. Pour celui-ci, une autre version du filtre de Kalman, le filtre de Kalman étendu, a été utilisée (1.3). Enfin, pour les deux modèles, les paramètres et les variables d'état ont été estimés à partir d'une procédure d'optimisation identique (1.4).

### **1.1. LE FILTRE DE KALMAN**

Le filtre de Kalman utilise des séries temporelles de données observées  $y_t$  pour reconstituer, à partir de la relation établie entre ces données et le vecteur des états  $\alpha_t$ , des séries temporelles pour ces variables non observables. Dans le cadre des modèles de structure par terme des prix des commodités étudiés, les données

---

<sup>1</sup> L'utilisation du filtre de Kalman dans le domaine financier date, à notre connaissance, du début des années 1990. Il a en particulier été utilisé dans le cadre de modèles de structure par terme des taux d'intérêt, entre autres par Pennacchi (1991), Lund (1994), (1997), Jegadeesh et Pennacchi (1996), Babbs et Nowman (1999).

observées  $y_t$  sont des séries temporelles de prix à terme pour différentes maturités, et le vecteur des états  $\alpha_t$  est constitué de deux éléments : le prix au comptant  $S$  et le *convenience yield*  $C$ .

Pour utiliser un filtre de Kalman, il est dans un premier temps nécessaire d'exprimer le modèle considéré sous la forme espace-états. Un modèle espace-états est caractérisé par une équation de mesure et une équation de transition<sup>2</sup>. L'équation de mesure est obtenue en ajoutant à la relation entre variables observées et variables non observables des perturbations, qui ne sont corrélées ni sériellement ni transversalement. Ces perturbations, de moyenne nulle, représentent tous les événements susceptibles de générer des erreurs dans les données : dans le cadre de modèles de structure par terme des prix des commodités, elles désignent par exemple la présence de limites de prix lorsque les fluctuations de prix sur le marché à terme sont très importantes, les erreurs introduites dans les séries de données, etc. L'équation de transition correspond à l'expression en temps discret des dynamiques des variables d'état.

Le filtre de Kalman permet de calculer de façon récursive l'estimateur du vecteur des états à la date  $t$  compte tenu de l'information disponible à cette date, et de mettre à jour continuellement ce vecteur au fur et à mesure que de nouvelles informations deviennent disponibles. Enfin, lorsque les perturbations et le vecteur des états sont normalement distribués, la fonction de vraisemblance peut être calculée, ce qui permet d'estimer les paramètres du modèle étudié<sup>3</sup>. Ces paramètres, dans le cas des modèles MR et AS, ne dépendent pas du temps.

Le programme permettant d'employer le filtre de Kalman procède de la façon suivante<sup>4</sup> : une itération est effectuée pour chaque observation  $y_t$  de la période d'étude, c'est-à-dire, dans le cadre de ces travaux, pour chaque vecteur de prix à terme de différentes maturités correspondant à une date  $t$ . Chaque itération est décomposée en trois étapes : la première consiste à prédire les valeurs des variables

---

<sup>2</sup> Pour certains modèles, il peut exister plusieurs représentations espace-états. Le choix de l'une de ces représentations n'est pas neutre, certaines étant plus stables que d'autres.

<sup>3</sup> Le calcul de la fonction de vraisemblance et la méthode d'estimation des paramètres sont présentées en sous-section 1.4.

<sup>4</sup> Les études empiriques sont effectuées à l'aide du logiciel Gauss.

d'état à la date  $t$  en fonction de leur valeur en  $(t-1)$ . La seconde permet de calculer l'innovation  $v_t$  correspondant à la différence constatée en  $t$  entre prix à terme théoriques calculés et prix à terme observés  $y_t$ . La dernière met à jour les variables d'état compte tenu de l'information apportée par l'innovation  $v_t$ . Ces variables d'état serviront de valeurs initiales au cours de la première phase de l'itération suivante.

Pour amorcer le processus itératif, il est nécessaire d'initialiser les variables d'état et la matrice de covariance qui leur est associée. En effet, pour la phase de prédiction de la première itération (date 1), la valeur des états et la matrice de covariance à la date 0 doivent être connues. Les variables d'état n'étant pas observables, une méthode d'approximation est choisie. Le prix au comptant est ainsi identifié au premier prix à terme à un mois observé ; le *convenience yield* est calculé à partir des deux premiers prix à terme rapprochés observés, en utilisant la solution du modèle BG<sup>5</sup>. De même, l'initialisation de la matrice de covariance doit être effectuée *a priori*. Une matrice diagonale ayant pour éléments les variances du prix au comptant et du *convenience yield* a été choisie en employant, afin d'obtenir des données pour ces variables d'état, la méthode d'approximation présentée ci-dessus. Pour calculer ces deux variances, les trente premières données de la période d'étude ont été retenues.

A une date  $t$  quelconque, lors de la phase de prédiction, la valeur des variables d'état et la matrice de covariance en  $(t-1)$  sont utilisées pour calculer, compte tenu de l'information disponible en  $(t-1)$ , l'espérance conditionnelle en  $t$  des états et la matrice de covariance associée. Ce calcul est effectué en employant l'équation de transition du modèle espace-états. L'espérance conditionnelle des états est ensuite utilisée pour calculer les prix à terme théoriques, à partir de l'équation de mesure du modèle. La différence entre prix à terme estimés et prix à terme observés à la date  $t$  constitue l'innovation  $v_t$ . Enfin, les valeurs des variables d'état et la matrice de covariance déterminées en phase de prédiction sont mises à jour en prenant en considération l'information disponible à la date  $t$ , apportée par l'innovation  $v_t$ . Une fois ce calcul réalisé, une nouvelle itération peut être abordée.

A partir des données observées  $y_t$ , le programme restitue ainsi les séries temporelles de prix estimés, l'innovation  $v_t$  correspondant à chaque observation, les

---

<sup>5</sup> Ce calcul a été présenté au chapitre trois, sous-section 2.3.2.c, note 17.

séries temporelles de variables d'état, et la valeur de la vraisemblance associée à chaque observation.

## 1.2. LE FILTRE DE KALMAN SIMPLE

Le filtre de Kalman simple constitue la version la plus couramment utilisée du filtre de Kalman. Cette méthode peut être utilisée lorsque les équations de mesures et de transition sont linéaires, ce qui est le cas du modèle MR, mais pas celui du modèle AS.

### 1.2.1. Présentation du filtre de Kalman simple<sup>6</sup>

Le modèle espace-états, dans le cas d'un filtre de Kalman simple, est caractérisé par les équations de transition et de mesure suivantes :

$$\text{Equation de transition : } \alpha_t = T\alpha_{t-1} + c + R\eta_t$$

où  $\alpha_t$  est le vecteur des états à la date  $t$ , de dimension  $m$ ,  $T$  est une matrice de dimension  $m \times m$ ,  $c$  est un vecteur  $m \times 1$  et  $R$  est une matrice  $m \times m$ .

$$\text{Equation de mesure : } y_t = Z\alpha_t + d + \varepsilon_t$$

où  $y_t$  est une série temporelle multivariée  $N \times 1$ ,  $Z$  est une matrice de dimension  $N \times m$ , et  $d$  est un vecteur de dimension  $N \times 1$ .

$\eta_t$  et  $\varepsilon_t$  sont des bruits blancs de dimensions respectives  $m \times 1$  et  $N \times 1$ . Ces deux processus sont supposés gaussiens, de moyenne nulle et de matrice de covariance respectives  $Q$  et  $H$  :

$$E[\eta_t] = 0, \text{ Var}[\eta_t] = Q$$

$$E[\varepsilon_t] = 0, \text{ Var}[\varepsilon_t] = H$$

On suppose que la position initiale du système est une variable gaussienne telle que :  $E[\alpha_0] = a_0$  et  $\text{Var}[\alpha_0] = P_0$ . Si  $a_t$  est un estimateur non biaisé de  $\alpha_t$  compte tenu de l'observation disponible à la période  $t$ , alors :  $E_t[\alpha_t - a_t] = 0$ . Par

---

<sup>6</sup> Cette présentation est inspirée de celles de Harvey (1989) et de Roncalli (1995).

conséquent, la matrice de covariance  $P_t$  associée à  $a_t$  est définie par la relation suivante<sup>7</sup> :  $P_t = E_t[(a_t - \alpha_t)(a_t - \alpha_t)']$ .

A chaque itération, les trois étapes suivantes sont successivement abordées dans le cadre du filtre de Kalman simple :

$$\text{- prédiction : } \begin{cases} a_{t/t-1} = Ta_{t-1} + c \\ P_{t/t-1} = TP_{t-1}T' + RQR' \end{cases}$$

où  $a_{t/t-1}$  et  $P_{t/t-1}$  sont les meilleurs estimateurs de  $\alpha_t$  et de  $P_t$  conditionnellement à l'information disponible à la période (t-1).

$$\text{- innovations : } \begin{cases} \tilde{y}_{t/t-1} = Za_{t/t-1} + d \\ v_t = y_t - \tilde{y}_{t/t-1} \\ F_t = ZP_{t/t-1}Z' + H \end{cases}$$

où  $\tilde{y}_{t/t-1}$  est l'estimation de l'observation  $y_t$  conditionnellement à l'information disponible en (t-1), et  $v_t$  est le processus d'innovation de matrice de covariance  $F_t$ .

$$\text{- mise à jour : } \begin{cases} a_t = a_{t/t-1} + P_{t/t-1}Z'F_t^{-1}v_t \\ P_t = (I - P_{t/t-1}Z'F_t^{-1}Z)P_{t/t-1} \end{cases}$$

Les matrices T, c, R, Z, d, Q, et H, indépendantes du temps dans le cas étudié, sont les matrices du système associées au modèle espace-états.

Enfin, dans le filtre de Kalman simple, les innovations sont calculées à partir du logarithme des observations. Ceci introduit une difficulté lors de la reconstitution des données estimées. La relation entre le logarithme des estimations  $\tilde{y}_{t/t-1}$  et le logarithme des observations  $y_t$  est en effet la suivante :

$$y_t = \tilde{y}_{t/t-1} + \sigma R$$

où  $\sigma$  est l'écart type des innovations et R est un résidu gaussien. En toute rigueur, lorsque l'on passe des logarithmes des observations aux observations elles-mêmes, la relation entre  $y_t$  et  $\tilde{y}_{t/t-1}$  devient :  $e^{y_t} = e^{\tilde{y}_{t/t-1}} \times e^{\sigma R}$

L'espérance de l'exponentielle des observations est alors<sup>8</sup> :

---

<sup>7</sup>  $(a_t - \alpha_t)'$  est la transposée de la matrice  $(a_t - \alpha_t)$ .

<sup>8</sup>  $e^{\tilde{y}_{t/t-1}}$  et  $e^{\sigma R}$  sont indépendantes l'une de l'autre.

$$E[e^{y_t}] = E[e^{\tilde{y}_{t/t-1}}] \times e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

Ainsi, lors de l'application du filtre de Kalman simple au modèle MR, pour restituer des prix estimés qui soient des estimateurs sans biais des prix observés, il faudrait associer un terme correctif à l'exponentielle des estimations. L'introduction de cette correction est cependant délicate, la variance des innovations étant modifiée dès que les paramètres le sont. Pour pallier cette difficulté, nous avons choisi de ne pas corriger les exponentielles des estimations, nous rapprochant ainsi de la procédure utilisée par Schwartz (1997) : pour apprécier les performances de ses modèles, celui-ci compare en effet le logarithme des observations au logarithme des estimations. Il considère donc implicitement que le passage aux prix réels peut être effectué sans introduire de terme correctif sur les estimations.

### 1.2.2. Filtre de Kalman simple appliqué au modèle MR

La solution analytique du modèle MR est utilisée pour obtenir, à partir du filtre de Kalman simple, des séries temporelles pour le prix au comptant S et le *convenience yield* C. La solution du modèle MR est la suivante :

$$F(S, C, t, T) = S \times \exp \left[ -C \frac{1 - e^{-\kappa \tau}}{\kappa} + B[\tau] \right] \quad (\text{MR5})$$

Avec :

$$B[\tau] = \left[ \left( r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_S \sigma_C \rho}{\kappa} \right) \times \tau \right] + \left[ \frac{1}{4} \sigma_C^2 \times \frac{1 - e^{-2\kappa \tau}}{\kappa^3} \right] + \left[ \left( \hat{\alpha} \kappa + \sigma_S \sigma_C \rho - \frac{\sigma_C^2}{\kappa} \right) \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa \tau}}{\kappa^2} \right) \right]$$

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

où :  $\kappa, \sigma_S, \sigma_C > 0$

- S est le prix au comptant,
- C est le *convenience yield* ,
- r est le taux sans risque, supposé constant,
- $\alpha$  est la valeur moyenne à long terme du *convenience yield*,
- $\kappa$  est la vitesse d'ajustement du *convenience yield*,

- $\sigma_S$  est la volatilité du prix au comptant,
- $\sigma_C$  est la volatilité du *convenience yield*,
- $\rho$  est le coefficient de corrélation liant les deux browniens associés à S et à C,
- $\lambda$  est la prime de risque associée au *convenience yield*.

Cette solution peut être linéarisée, de la façon suivante :

$$\ln F(S, C, t, T) = \ln S - C \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B[\tau]$$

Pour appliquer un filtre de Kalman simple au modèle MR, il est en premier lieu nécessaire d'exprimer ce dernier sous forme espace-états. En conservant les notations précédentes, l'équation de mesure associée au modèle MR est la suivante :

$$y_t = d + Z \times \begin{bmatrix} G_t \\ C_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, NT$$

Où :

- $y_t = [\ln(F(S, C, \tau_i))]$  est la ligne i du vecteur de variables observables  $y_t$ , avec  $i = 1, \dots, N$ . Dans le cas étudié, les variables observables sont des prix à terme pour différentes échéances, N correspondant au nombre de maturités retenues pour l'estimation<sup>9</sup>.
- $G_t = \ln(S_t)$ ,
- $d = [B(\tau_i)]$  est la ligne i du vecteur  $d$ , de dimension  $(N \times 1)$ , avec  $i = 1, \dots, N$ .
- $Z = \begin{bmatrix} 1 & , & -\frac{1 - e^{-\kappa\tau_i}}{\kappa} \end{bmatrix}$  est la ligne i de la matrice Z, de dimension  $(N \times 2)$ ,  
avec  $i=1, \dots, N$
- $\varepsilon_t$  est un vecteur de perturbations non corrélées sériellement, de dimension  $(N \times 1)$   
avec :  $E[\varepsilon_t] = 0$ , et  $H = \text{Var}[\varepsilon_t]$ , matrice de dimension  $(N \times N)$ .

L'équation de transition est obtenue à partir de l'expression en temps discret de la dynamique des états du modèle MR. Cette dynamique est la suivante :

---

<sup>9</sup> Afin de réduire le temps de calcul, le nombre de maturités utilisées pour les estimations a été fixé à  $N = 4$ .

$$\begin{cases} dS = (\mu - C)Sdt + \sigma_s Sdz_s \\ dC = [k(\alpha - C)]dt + \sigma_c dz_c \end{cases} \quad (\text{MR1})$$

Avec :  $E[dz_s \times dz_c] = \rho dt$

- Où :
- $\mu$  est le rendement instantané anticipé pour la variable S,
  - $dz_s$  est l'incrément du mouvement brownien associé au prix au comptant,
  - $dz_c$  est l'incrément du mouvement brownien associé au *convenience yield*.

Sachant que  $G = \ln(S)$ , il est possible d'écrire<sup>10</sup> :

$$\begin{cases} dG = (\mu - C - \frac{1}{2}\sigma_s^2)dt + \sigma_s dz_s \\ dC = [k(\alpha - C)]dt + \sigma_c dz_c \end{cases}$$

L'équation de transition est alors, en conservant les notations précédentes :

$$\begin{bmatrix} G_t \\ C_t \end{bmatrix} = c + T \times \begin{bmatrix} G_{t-1} \\ C_{t-1} \end{bmatrix} + R\eta_t \quad t = 1, \dots, NT$$

Avec :

- $c = \begin{bmatrix} \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\Delta t \\ \kappa\alpha\Delta t \end{bmatrix}$ , vecteur de dimension  $(m \times 1)$ , où  $m = 2$ ,
- $T = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 - \kappa\Delta t \end{bmatrix}$ , matrice de dimension  $(m \times m)$ ,
- $R$  : matrice identité de dimension  $(m \times m)$ ,
- $\eta_t$  : perturbations non corrélées avec :

$$E[\eta_t] = 0, \quad Q = \text{Var}[\eta_t] = \begin{bmatrix} \sigma_s^2\Delta t & \rho\sigma_s\sigma_c\Delta t \\ \rho\sigma_s\sigma_c\Delta t & \sigma_c^2\Delta t \end{bmatrix}$$

T, c, R, Z, d, Q, et H sont les matrices du système associées au modèle MR<sup>11</sup>.

### 1.3. LE FILTRE DE KALMAN ETENDU

Lorsque le modèle étudié ne présente pas les caractéristiques de linéarité requises pour appliquer un filtre de Kalman simple, une version généralisée de ce

<sup>10</sup> Voir l'annexe quatre, équation (MR7).

<sup>11</sup> Le programme associé au filtre de Kalman simple est présenté en annexe sept.



dernier, le filtre de Kalman étendu, peut être utilisée. Celui-ci est beaucoup moins fréquemment employé que le filtre de Kalman simple<sup>12</sup>. Comme dans la sous-section précédente, le filtre de Kalman étendu est présenté (1.3.1), pour expliquer ensuite comment il a été appliqué au modèle AS (1.3.2).

### 1.3.1. Présentation du filtre de Kalman étendu<sup>13</sup>

Une version étendue du filtre de Kalman peut être utilisée lorsque le modèle considéré est non linéaire. Dans ce cas, un estimateur optimal des variables d'état ne peut généralement être obtenu. Un filtre approximatif est élaboré en linéarisant le modèle.

Dans le cas non linéaire, les équations de transition et de mesure du modèle espace-états sont les suivantes :

$$\text{Equation de transition : } \alpha_t = T(\alpha_{t-1}) + R(\alpha_{t-1})\eta_t$$

où  $\alpha_t$  est le vecteur des états à la date  $t$ , de dimension  $m$ ,  $T(\alpha_{t-1})$  et  $R_t(\alpha_{t-1})$  dépendent des valeurs des variables d'état en  $(t-1)$ .

$$\text{Equation de mesure : } y_t = Z(\alpha_t) + \varepsilon_t$$

où  $y_t$  est une série temporelle multivariée  $N \times 1$ ,  $Z(\alpha_t)$  est une fonction non linéaire des variables d'état. Comme dans le cas du filtre de Kalman simple, les deux processus  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  sont considérés comme normalement distribués, de moyenne nulle et de matrices de covariance respectives  $H$  et  $Q$  :

$$E[\eta_t] = 0 \text{ et } \text{Var}[\eta_t] = Q$$

$$E[\varepsilon_t] = 0 \text{ et } \text{Var}[\varepsilon_t] = H .$$

La position initiale du système est telle que :  $E[\alpha_0] = a_0$  et  $\text{Var}[\alpha_0] = P_0$ . Si  $a_t$  est un estimateur non biaisé de  $\alpha_t$  compte tenu de l'observation disponible à la période  $t$ ,  $E_t[\alpha_t - a_t] = 0$ . Par conséquent, la matrice de covariance  $P_t$  associée à  $a_t$  est définie par la relation suivante :  $P_t = E_t[(a_t - \alpha_t)(a_t - \alpha_t)']$ .

<sup>12</sup> A notre connaissance, il n'a pas encore été utilisé dans le domaine financier.

<sup>13</sup> La présentation du filtre de Kalman étendu est inspirée de celles de Harvey (1989) et de Anderson et Moore (1979).

En considérant que les fonctions  $Z(\alpha_t)$  et  $T(\alpha_{t-1})$  sont suffisamment lisses, il est possible de calculer leur développement limité de Taylor au voisinage de l'espérance conditionnelle  $a_{t/t-1}$  et de  $a_{t-1}$ . La version linéarisée du modèle sous forme espace-états est dans ce cas exprimée de la façon suivante :

$$\begin{cases} y_t \approx \hat{Z}\alpha_t + \varepsilon_t \\ \alpha_t \approx \hat{T}\alpha_{t-1} + \hat{R}\eta_t \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \hat{Z} = \left. \frac{\partial Z(\alpha_t)}{\partial \alpha_t'} \right|_{\alpha_t = a_{t/t-1}} \quad \hat{T} = \left. \frac{\partial T(\alpha_{t-1})}{\partial \alpha_{t-1}'} \right|_{\alpha_{t-1} = a_{t-1}} \quad \hat{R} = R(a_{t-1}) \approx R(\alpha_{t-1})$$

A chaque itération, les trois étapes suivantes sont successivement abordées dans le cadre du filtre de Kalman étendu :

$$\text{- prédiction : } \begin{cases} a_{t/t-1} = T(a_{t-1}) \\ P_{t/t-1} = \hat{T}P_{t-1}\hat{T}' + \hat{R}Q\hat{R}' \end{cases}$$

où  $a_{t/t-1}$  et  $P_{t/t-1}$  sont les estimateurs de  $\alpha_t$  et de  $P_t$  conditionnellement à l'information disponible à la période (t-1).

$$\text{- innovations : } \begin{cases} \tilde{y}_{t/t-1} = Z(a_{t/t-1}) \\ v_t = y_t - \tilde{y}_{t/t-1} \\ F_t = \hat{Z}_t P_{t/t-1} \hat{Z}_t' + H \end{cases}$$

où  $\tilde{y}_{t/t-1}$  est l'estimation de  $y_t$  conditionnellement à l'information disponible en (t-1), et  $v_t$  le processus d'innovation de matrice de covariance  $F_t$ .

$$\text{- mise à jour : } \begin{cases} a_t = a_{t/t-1} + P_{t/t-1} \hat{Z}_t' F_t^{-1} v_t \\ P_t = (I - P_{t/t-1} \hat{Z}_t' F_t^{-1} \hat{Z}_t) P_{t/t-1} \end{cases}$$

Dans le cas étudié, les fonctions  $Z(\alpha_t)$ ,  $T(\alpha_{t-1})$ , et  $R_t(\alpha_{t-1})$  ainsi que les matrices de covariance H et Q sont invariantes dans le temps.  $Z(\alpha_t)$ ,  $T(\alpha_{t-1})$  et  $R_t(\alpha_{t-1})$  sont les fonctions du système. H et Q sont les matrices du système.

### 1.3.2. Application du filtre de Kalman étendu au modèle AS

La solution du modèle AS est la suivante :

$$F(t,T) = S(t) \times A(\tau) \times \exp(H(\beta-1)C(t)) \times E_t^Q \left[ \exp \left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1-\beta) \int_t^T B(v)dv - \beta \int_t^T (\exp D(v) + B(v))dv \right) \right] \quad (AS5)$$

$$\text{Avec : } H = \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}, \quad \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}, \quad A(\tau) = \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \tau + \hat{\alpha}(1-\beta)(H-\tau) \right)$$

$$B(v) = \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y), \quad D(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) e^{-\kappa(v-t)}$$

Où  $\beta$  est le coefficient d'asymétrie du *convenience yield*,  $\tau$  est la maturité du contrat à terme.

Pour utiliser le filtre de Kalman étendu, le modèle AS doit être exprimé sous forme espace-états. En conservant les notations précédentes, l'équation de mesure associée au modèle AS est la suivante :

$$y_t = Z(S_t, C_t) + \varepsilon_t$$

où :

-  $y_t$  est un vecteur de variables observables, de dimension  $(N \times 1)$ . Dans le cas étudié, les variables observables sont des prix à terme pour différentes échéances,  $N$  correspondant au nombre de maturités retenues.

-  $Z(S_t, C_t)$  est une matrice de dimension  $(N \times m)$ , dont la ligne  $i$  est exprimée de la façon suivante :

$$Z(S_t, C_t) = [S_t \times A(\tau_i) \times \exp(H(\beta-1)C_t) \times E_t^Q [\exp(\sigma_s Z_s(\tau_i) - (1-\beta)W(\tau_i) - \beta V(\tau_i))]]$$

$$\text{avec : } i = 1, \dots, N, \quad H = \frac{1-e^{-\kappa\tau_i}}{\kappa}, \quad A(\tau_i) = \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \tau_i + \hat{\alpha}(1-\beta)(H-\tau_i) \right)$$

$$Z_s(\tau_i) = \int_t^{\tau_i} dz_s(y), \quad W(\tau_i) = \int_t^{\tau_i} B(v)dv = \int_t^{\tau_i} \sigma_c e^{-\kappa v} \left\{ \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right\} dv$$

$$V(\tau_i) = \int_t^{\tau_i} \exp(B(v) + D(v)) dv = \int_t^{\tau_i} \exp \left( \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \left\{ \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right\} \right) dv$$

où  $v < T$ .

L'équation de transition est obtenue à partir de l'expression en temps discret de la dynamique des états du modèle AS. Cette dynamique est la suivante :

$$\begin{cases} dS = (\mu - \tilde{C})Sdt + \sigma_s S dz_s \\ d\tilde{C} = \left( \kappa(\alpha - C)(1 - \beta + \beta e^C) + \frac{1}{2} \beta e^C \sigma_c^2 \right) dt + (1 - \beta + \beta e^C) \sigma_c dz_c \end{cases} \quad (\text{AS2})$$

avec :

$$E[dz_s \times dz_c] = \rho dt$$

L'équation de transition est alors, en conservant les notations précédentes :

$$\begin{bmatrix} S_t \\ C_t \end{bmatrix} = T(S_{t-1}, C_{t-1}) + R(S_{t-1}, C_{t-1}) \eta_t$$

où :

-  $\begin{bmatrix} S_t \\ C_t \end{bmatrix}$  est le vecteur des états de dimension  $(m \times 1)$ , avec  $m = 2$ .

-  $T(S_{t-1}, C_{t-1})$  est un vecteur de dimension  $(m \times 1)$ , avec  $m = 2$  :

$$T(S_{t-1}, C_{t-1}) = \begin{bmatrix} S_{t-1} (1 + \mu \Delta t - (1 - \beta) C_{t-1} \Delta t - \beta \exp(C_{t-1}) \Delta t) \\ \kappa \alpha (1 - \beta) \Delta t + C_{t-1} (1 - \beta - \kappa (1 - \beta + \beta e^{C_{t-1}}) \Delta t) + \beta e^{C_{t-1}} \left( \kappa \alpha \Delta t + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \Delta t + 1 \right) \end{bmatrix}$$

-  $R(S_{t-1}, C_{t-1})$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$  :

$$R(S_{t-1}, C_{t-1}) = \begin{bmatrix} S_{t-1} & 0 \\ 0 & 1 - \beta + \beta \exp(C_{t-1}) \end{bmatrix}$$

$Var(\eta_t) = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \rho \sigma_s \sigma_c \\ \rho \sigma_s \sigma_c & \sigma_c^2 \end{bmatrix}$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$ .

Enfin, les dérivées des fonctions  $T(S_{t-1}, C_{t-1})$  et  $R(S_{t-1}, C_{t-1})$  par rapport aux variables d'état, respectivement  $\hat{T}$  et  $\hat{R}$ , sont exprimées de la façon suivante :

- $\hat{T}$  est une matrice de dimension (m×m) :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 + \mu\Delta t - (1 - \beta)C_{t-1}\Delta t - \beta \exp(C_{t-1})\Delta t, & -(1 - \beta)S_{t-1}\Delta t - \beta S_{t-1} \exp(C_{t-1})\Delta t \\ 0, & (1 - \beta - \kappa(1 - \beta + \beta e^{C_{t-1}} + \beta C_{t-1} e^{C_{t-1}})\Delta t) + \beta e^{C_{t-1}} \left( \kappa\alpha\Delta t + \frac{1}{2}\sigma_C^2\Delta t + 1 \right) \end{bmatrix}$$

- $\hat{Z}$  est une matrice de dimension (m×N) : la ligne i de cette matrice est exprimée de la façon suivante, avec i = 1,...N :

$$\hat{Z} = [f_A(\tau_i)E_t[X(\tau_i)], \quad S_t \times f_A(\tau_i) \times (\beta - 1) \times E_t'[X(\tau_i)]]$$

où : -  $f_A(\tau_i) = A(\tau_i) \times \exp(H(\beta - 1)C_t)$ ,

$$- E_t[X(\tau_i)] = E_t[\exp(\sigma_S Z_S(\tau_i) - (1 - \beta)W(\tau_i) - \beta V(\tau_i))],$$

-  $E_t'[X(\tau_i)]$  est la dérivée de l'espérance par rapport à C :

$$E_t'[X(\tau_i)] = E_t \left[ \exp \left( \sigma_S Z_S(\tau_i) - (1 - \beta)W(\tau_i) - \beta \int_t^{\tau_i} (\exp(-\kappa v) \exp(B(v) + D(v))) dv \right) \right].$$

Le filtre de Kalman étendu est obtenu en linéarisant la fonction associant les variables observées aux variables non observables. Une approximation est donc réalisée par rapport au cas précédent. Sur le plan pratique, le passage d'une méthode à l'autre suppose que les matrices de système Z, T, et R du filtre de Kalman simple sont remplacées par des fonctions dépendant des variables d'état<sup>14</sup>.

#### 1.4.ESTIMATION DES PARAMETRES

Lorsque les perturbations et le vecteur des variables d'état sont normalement distribués, le filtre de Kalman peut être utilisé pour estimer les paramètres du modèle étudié. Pour cela, à chaque itération du filtre de Kalman, le logarithme de la fonction de vraisemblance associé à l'observation  $y_t$  est calculé.

Pour obtenir les paramètres optimaux de la période d'étude, une procédure d'optimisation maximisant le logarithme de la fonction de vraisemblance associé aux

observations est élaborée (1.4.1). Cette procédure est adaptée aux caractéristiques du modèle AS : elle tient compte du fait que les prix théoriques du modèle AS ne sont pas calculés analytiquement mais numériquement (1.4.2).

### 1.4.1 Calcul du maximum de vraisemblance

A chaque itération du filtre de Kalman, pour un vecteur de paramètres donné et en supposant que les innovations sont normalement distribuées, le logarithme de la vraisemblance de l'innovation est calculé :

$$\log l(t) = -\left(\frac{n}{2}\right) \times \ln(2\Pi) - \frac{1}{2} \ln(dF_t) - \frac{1}{2} v_t' \times F_t^{-1} \times v_t$$

où  $v_t$  est l'innovation à la date  $t$ ,  $F_t$  est la matrice de covariance qui lui est associée,  $dF_t$  est le déterminant de la matrice  $F_t$ <sup>15</sup>.

En supposant que l'équation de mesure du modèle admet des dérivées partielles continues du premier et du second ordre par rapport aux paramètres, l'estimation des paramètres est effectuée à l'aide d'une procédure récursive permettant de déterminer, à partir d'un vecteur de paramètres initial de dimension  $M$ , le vecteur de paramètres  $x$  maximisant la fonction de vraisemblance  $f$ . Une fois les paramètres optimaux déterminés, le filtre de Kalman est utilisé une dernière fois pour reconstituer les séries de variables d'état qui leur sont associées.

A chaque itération de la procédure d'optimisation, une direction  $d$  (vecteur de dimension  $M$ ) et un pas  $\alpha$  sont calculés. La direction  $d$  correspond aux quantités ajoutées aux paramètres estimés au cours de la précédente itération. C'est la solution de l'équation  $Hd = -g$ , où  $g$  est un vecteur de gradients de dimension  $M$  et  $H$  est une matrice hessienne de dimension  $M \times M$ <sup>16</sup>.

---

<sup>14</sup> Le programme associé au filtre de Kalman étendu est présenté en annexe huit.

<sup>15</sup> La valeur de  $\log l(t)$  est corrigée lorsque le déterminant  $dF_t$  est nul.

<sup>16</sup> Dans cette procédure, le calcul des dérivées partielles est réalisé en utilisant une méthode numérique.

Le calcul de la matrice  $H$  est effectué au moyen d'une méthode quasi-Newton, en utilisant l'algorithme de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno (BFGS)<sup>17</sup>. Une fois la matrice  $H$  calculée, l'équation  $Hd = -g$  est résolue en fonction de  $d$ . Il est alors possible de déterminer, pour une direction  $d$ , un nouveau vecteur de paramètres  $x_+$  de la façon suivante :  $x_+ = x + \alpha d$ , où  $\alpha$  est une constante, appelée pas, qui minimise la fonction  $f$  dans la direction  $d$ . La valeur de  $\alpha$  est obtenue au moyen d'une méthode polynomiale.

Compte tenu de la complexité des fonctions à minimiser, l'optimisation est effectuée, dans le cas du modèle MR comme dans celui du modèle AS, en imposant des contraintes sur les valeurs des paramètres. En particulier, les volatilités du prix au comptant et du *convenience yield*, et la force de rappel  $\kappa$  associée à cette variable d'état sont supposées positives ; de plus, la corrélation entre les mouvements browniens associés au prix au comptant et au *convenience yield* est supposée positive et comprise entre les valeurs 0 et 1.

### 1.4.2. Optimisation avec simulation

Compte tenu de la forme semi-analytique de la solution du modèle AS, les prix à terme, pour ce modèle, sont calculés numériquement. Plus précisément, dans le filtre de Kalman étendu, la fonction  $Z(S_t, C_t)$  de l'équation de mesure comprend une espérance qui doit être simulée<sup>18</sup> :

$$Z(S_t, C_t) = [S_t \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C_t) \times E_t[\exp(\sigma_S Z_S(\tau) - (1 - \beta)W(\tau) - \beta V(\tau))]]$$

avec :  $Z_S(\tau) = \int_t^T dz_S(y) = u_S \sqrt{\tau}$ , où  $u_S \sim N(0,1)$

---

<sup>17</sup> Dans l'algorithme de Newton,  $H$  est la matrice hessienne  $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'}$ , où  $f$  est la fonction à minimiser, et  $x$  est le vecteur de paramètres. Le calcul de la matrice  $H$  présente généralement des difficultés. C'est pour les contourner que les méthodes quasi-Newton ont été développées. Dans l'algorithme BFGS, la matrice  $H$  est calculée par approximation.

<sup>18</sup> La fonction  $\hat{Z}$  comprend deux espérances qui doivent être simulées : la première est identique à celle de  $Z(S_t, C_t)$ , la seconde est la dérivée de cette espérance par rapport à  $C$  (sous-section 1.3.2 de ce chapitre).

$$W(\tau) = \int_t^T B(v) dv \quad B(v) = \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)$$

$$V(\tau) = \int_t^T \exp(B(v) + D(v)) dv = \int_t^T \exp\left(\hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \left\{ \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right\}\right) dv$$

où  $v < T$

Dans l'espérance présentée ci-dessus, les termes  $W(\tau)$  et  $V(\tau)$  sont tous deux exprimés en fonction de  $B(v)$ . Ce dernier est une fonction du mouvement brownien standard  $dz_c$ , positivement corrélé avec  $dz_s$ . Il s'agit donc de générer  $B(v)$  en respectant sa corrélation avec  $z_s$ . Pour cela,  $B(v)$  est exprimé de la façon suivante<sup>19</sup> :

$$B(v) = \lambda z_s(\tau) + \mu R(u, \tau) \quad (\text{AS7})$$

Où :  $R \sim N(0,1)$  est indépendant de  $Z_s$ ,

$$\lambda = \frac{\text{Cov}(B(v), z_s(\tau))}{\tau} = \frac{\rho \sigma_c}{\kappa \tau} (1 - e^{-\kappa(v-t)})$$

$$\mu^2 = \text{Var}[B(v) - \lambda z_s(\tau)] = \sigma_c^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(v-t)}}{2\kappa} \right) - \frac{\sigma_c^2 \rho^2}{\tau} \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa(v-t)}}{\kappa} \right)^2$$

Dans la procédure d'optimisation, ces deux variables gaussiennes sont générées chacune avec un germe unique et stockées sous forme de matrices. La génération de nombres aléatoires est ainsi effectuée une seule fois pour toute la procédure d'optimisation, ce qui présente plusieurs avantages : en premier lieu, l'utilisation d'un germe unique pour chaque variable aléatoire introduit une cohérence entre les prix à terme simulés permettant de calculer les dérivées des prix par rapport aux paramètres. De plus, le recours à un germe unique autorise la répétition d'expériences identiques. Enfin, cette méthode permet de réduire le temps de calcul, car elle évite de générer deux séries de variables gaussiennes à chaque fois qu'un prix à terme est calculé.

---

<sup>19</sup> Le détail de ces calculs est présenté en annexe cinq.



## SECTION 2. DONNEES UTILISEES<sup>20</sup>

Les données utilisées pour les estimations sont celles du NYMEX, pour le contrat WTI (pétrole brut) du 1<sup>er</sup> avril 1991 au 16 novembre 1998. Elles ont été traitées de telle sorte que le premier prix à terme corresponde effectivement à une maturité d'1 mois ( $\tau_1$ ), que le second corresponde à une maturité de 2 mois ( $\tau_2$ ), etc. Ces données, à l'origine quotidiennes, ont été transformées en données hebdomadaires en retenant la première observation de chaque série de cinq. Pour les estimations des paramètres et la reconstitution de séries de données non observables, quatre séries de prix à terme, correspondant aux échéances de 1 mois, 3 mois, 6 mois et 9 mois, ont été sélectionnées<sup>21</sup>.

Les taux d'intérêt choisis pour les tests empiriques sont ceux des bons du Trésor américain (*T-bill*) à trois mois. Le taux d'intérêt étant constant dans les deux modèles étudiés, une moyenne de ces observations a été réalisée pour chaque période considérée.

Les données utilisées pour les estimations des paramètres ont été séparées en deux sous-périodes de durées différentes : du 1<sup>er</sup> avril 1991 au 18 septembre 1995 (234 observations hebdomadaires) et du 25 septembre 1995 au 11 mai 1998 (138 observations). Des tests en extrapolation ont ensuite été réalisés sur deux périodes de trois mois et deux périodes de six mois, afin d'étudier la façon dont les innovations évoluent lorsque la période de test augmente : du 25 septembre 1995 au 25 décembre 1995 (14 observations) et du 18 mai 1998 au 17 août 1998 (14 observations) pour les tests portant sur une durée de trois mois ; du 25 septembre au 25 mars 1996 (26 observations) et du 18 mai 1998 au 16 novembre 1998 (27 observations) pour les tests portant sur une durée de six mois.

---

<sup>20</sup> Les données sont présentées en annexe six.

<sup>21</sup> Il aurait été plus intéressant, compte tenu du fait que ces modèles sont étudiés afin de les employer ensuite dans le cadre de décisions à long terme, d'utiliser des séries prix à terme pour des échéances plus éloignées. Cependant, les données du Nymex, au cours de la période 1991-1995, ne sont pas continues pour des échéances au-delà de 16 mois. De plus, le recours à des échéances proches permet de réduire le temps de calcul nécessaire à l'optimisation.

## SECTION 3. TESTS PRELIMINAIRES

Avant d'aborder la comparaison des modèles MR et AS (section quatre de ce chapitre), des tests préliminaires sont réalisés afin de mesurer l'impact sur les performances des approximations que constituent l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu au lieu d'un filtre de Kalman simple (3.1), et le calcul de prix à terme au moyen de simulations (3.2). Au modèle MR sont donc successivement appliqués un filtre de Kalman simple, un filtre de Kalman étendu, et un filtre de Kalman étendu avec simulations.

### 3.1. COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS AVEC LES DEUX FILTRES DE KALMAN

La comparaison des performances du modèle MR lorsque le filtre de Kalman simple et le filtre de Kalman étendu sont utilisés permet de montrer dans quelle mesure l'approximation que représente la linéarisation du modèle dans le filtre de Kalman étendu modifie les performances de celui-ci. Avant de présenter les résultats de cette étude, les critères utilisés pour mesurer la performance sont présentés (3.1.1). Deux séries de tests sont ensuite réalisées : les premiers analysent la capacité du modèle MR à représenter les prix à terme sur les périodes ayant servi à estimer les paramètres : du 1<sup>er</sup> avril 1991 au 18 septembre 1995 et du 25 septembre 1995 au 11 mai 1998 (3.1.2). Les seconds testent la capacité du modèle MR à prédire les prix à terme sur une période ultérieure à celle ayant servi à estimer les paramètres. Les études en extrapolation sont réalisées sur des périodes de trois puis de six mois, pour étudier la façon dont les erreurs de prédiction évoluent lorsque la période de tests en extrapolation augmente (3.1.3).

#### 3.1.1. Critères de performance

Pour analyser les performances des modèles de structure par terme des prix des commodités appliqués au marché du pétrole brut, toutes les études réalisées dans

ce chapitre recourent aux deux même critères : les erreurs de prix moyennes (*Mean Pricing Errors*) et la racine de la moyenne des carrés des erreurs (*Root Mean Squared Errors*).

La définition des erreurs de prix moyennes (MPE), exprimées en USD, est la suivante :

$$MPE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{F}_{\tau,n} - F_{\tau,n})$$

où N est le nombre d'observations,  $\hat{F}_{\tau}$  est le prix théorique de maturité  $\tau$  calculé à partir de chaque modèle, et  $F_{\tau}$  le prix à terme de maturité  $\tau$  observé. Le MPE mesure le biais d'estimation. Si cette dernière est correcte, le MPE doit être très proche de zéro.

En retenant les mêmes notations, la racine de la moyenne des carrés des erreurs (RMSE), exprimée en USD, est calculée pour chaque maturité de la façon suivante :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{F}_{\tau,n} - F_{\tau,n})^2}$$

Le RMSE est une variance empirique, calculée en supposant que les estimations sont non biaisées. Ce critère permet de mesurer la qualité des estimations en terme de stabilité. Il est considéré comme le plus représentatif : les erreurs de prix peuvent en effet se compenser de telle sorte que l'erreur de prix moyenne soit faible malgré la présence d'écarts importants.

### 3.1.2. Etude sur la base d'apprentissage

Les périodes d'études utilisées pour estimer les paramètres du modèle MR (du 1<sup>er</sup> avril 1991 au 18 septembre 1995 et du 25 septembre 1995 au 11 mai 1998) sont de durée différente, afin de mesurer l'impact du volume d'information utilisé sur les performances du modèle. Les paramètres estimés à partir de ces deux méthodes sont comparés (3.1.2.1) avant d'étudier la capacité du modèle à représenter les prix à terme observés (3.1.2.2).

#### 3.1.2.1. Paramètres estimés

Sur les deux périodes d'étude ayant servi à estimer les paramètres, le filtre de Kalman simple et le filtre de Kalman étendu ne conduisent pas tout à fait aux mêmes paramètres optimaux, comme le montrent les tableaux 5.1 et 5.2<sup>22</sup> :

**Tableau 5.1. Paramètres optimaux, période 1991-1995<sup>23</sup>**

	Kalman simple		Kalman étendu	
	Paramètres	Gradient	Paramètres	Gradient
Force de rappel : $\kappa$	0,868132	0,000416	1,242609	-0,000000
Tendance : $\mu$	0,052609	0,000549	0,061454	-0,000001
Volatilité de S : $\sigma_S$	0,172437	0,002044	0,193112	-0,000004
Valeur moyenne de C : $\alpha$	0,056830	0,008760	0,061365	0,000018
Volatilité de C : $\sigma_C$	0,138762	-0,000634	0,185466	0,000005
Coefficient de corrélation $\rho$	0,952236	-0,000013	0,964052	0,000000
Prime de risque : $\lambda$	0,025027	-0,008709	0,039162	0,000042

Au cours de la période 1991-1995, les principales différences constatées entre les paramètres optimaux obtenus à partir du filtre de Kalman simple et du filtre de Kalman étendu portent sur la force de rappel associée au *convenience yield*,  $\kappa$ , et la volatilité du *convenience yield*,  $\sigma_C$ . Ce phénomène ne se reproduit pas au cours de la période 1995-1998 : dans ce cas, les principales différences portent en effet sur la valeur moyenne à long terme du *convenience yield*,  $\alpha$ , et la prime de risque associée à cette variable d'état,  $\lambda$ .

**Tableau 5.2. Paramètres optimaux, période 1995-1998**

Kalman simple		Kalman étendu	
Paramètres	Gradient	Paramètres	Gradient

<sup>22</sup> Les optimisations sont réalisées, dans tout le chapitre, avec une précision de  $10^{-5}$  sur les gradients. Les gradients présentés dans les tableaux 5.1 et 5.2. sont ceux correspondant aux paramètres optimaux.

<sup>23</sup> Pour les deux filtres, et pour les deux périodes, les valeurs des paramètres utilisés pour amorcer l'optimisation sont identiques. Ces valeurs sont les suivantes :  $\kappa = 0,5$  ;  $\mu = 0,1$  ;  $\sigma_S = 0,3$  ;  $\alpha = 0,1$  ;  $\sigma_C = 0,4$  ;  $\rho = 0,5$  ;  $\lambda = 0,1$ .

Force de rappel $\kappa$	1,969842	-0,000265	2,023929	0,000114
Tendance $\mu$	0,142741	0,001629	0,192335	0,000083
Volatilité de S $\sigma_S$	0,241347	0,000177	0,228553	0,000339
Valeur moyenne de C $\alpha$	0,098906	0,001271	0,149024	0,001422
Volatilité de C $\sigma_C$	0,400676	-0,001242	0,383852	0,000053
Coefficient de corrélation $\rho$	0,967136	-0,000031	0,973072	-0,000001
Prime de risque $\lambda$	0,088951	-0,001609	0,185988	-0,000883

Les différences constatées entre les paramètres optimaux obtenus à partir des deux filtres montrent que l'effet de la linéarisation, lorsque le filtre de Kalman étendu est appliqué au modèle MR, n'est pas négligeable<sup>24</sup>. Cet effet sera probablement encore plus important dans le cas du modèle AS.

Par ailleurs, ces tests permettent de constater, comme l'avait fait Schwartz en 1997, que les paramètres diffèrent d'une période d'étude à l'autre : ils ne sont pas constants dans le temps. En particulier, dans le cas étudié ici, la force de rappel associée au *convenience yield* est plus élevée au cours de la seconde période. Il en est de même pour la volatilité de cette variable d'état.

### 3.1.2.2. Performances

Sur les deux périodes d'étude utilisées pour estimer les paramètres, si l'on se réfère au critère du RMSE, le filtre de Kalman simple permet de représenter un peu plus précisément les prix à terme que ne l'autorise le filtre de Kalman étendu, comme le montrent les tableaux 5.3 et 5.4. Cette observation est valable pour les deux périodes d'études, sur toutes les maturités étudiées. L'écart de performance est plus important pour la période d'étude la plus étendue (1991-1995)<sup>25</sup>.

**Tableau 5.3. Filtres de Kalman simple/étendu, période 1991-1995**

Maturité	Kalman simple		Kalman étendu	
	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	-0,04629	1,27582	0,00416	1,57949

<sup>24</sup> Les paramètres estimés à l'aide des deux méthodes sont malgré tout du même ordre de grandeur que ceux obtenus par Schwartz (1997) sur le marché du pétrole brut, pour des périodes différentes.

<sup>25</sup> Les MPE et RMSE présentés dans ce chapitre ne peuvent être directement comparés avec ceux de Schwartz (1997), celui-ci ayant calculé ces chiffres à partir des prix exprimés en logarithme.

3 mois	-0,04361	1,28516	0,00518	1,69458
6 mois	-0,03878	1,12686	0,00594	1,52304
9 mois	-0,03262	0,98453	0,00636	1,28620
Moyenne	-0,04032	1,16811	0,005407	1,52008

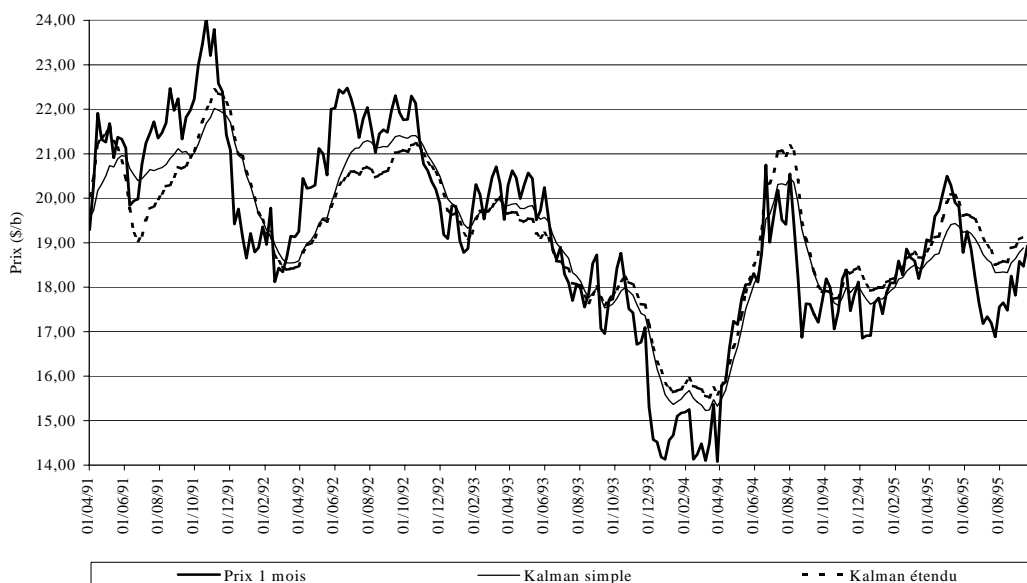
Sur la période 1991-1995, les erreurs de prix moyennes obtenues à partir du filtre de Kalman étendu sont légèrement inférieures à celles obtenues à partir du filtre de Kalman simple. Les dernières comportent un léger biais négatif, tandis que les premières sont faiblement positives. Ce phénomène ne se reproduit pas sur la période 1995-1998 : dans ce cas, les erreurs de prix moyennes obtenues à partir des deux filtres sont légèrement positives. De plus, quelle que soit la maturité considérée, celles associées au filtre de Kalman simple sont les plus faibles.

**Tableau 5.4. Filtres de Kalman simple/étendu, période 1995-1998**

Maturité	Kalman simple		Kalman étendu	
	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	-0,063	1,2769	0,0775	1,3972
3 mois	0,1064	1,1804	0,2145	1,3011
6 mois	0,1453	1,0142	0,2235	1,0861
9 mois	0,1419	0,8468	0,2029	0,8812
Moyenne	0,0827	1,0796	0,1796	1,1664

Enfin, pour les deux périodes d'étude, le RMSE diminue lorsque la maturité augmente, ce qui est là encore cohérent avec les résultats obtenus par Schwartz (1997) sur d'autres périodes. Cependant, ce dernier avait également utilisé des prix à terme pour des échéances plus éloignées, ce qui lui avait permis de constater que le RMSE, après avoir diminué, augmente lorsque la maturité des contrats à terme étudiés devient supérieure à 15 mois.

**Figure 5.1. Prix à terme observés / prix à terme estimés, 1991-1995**

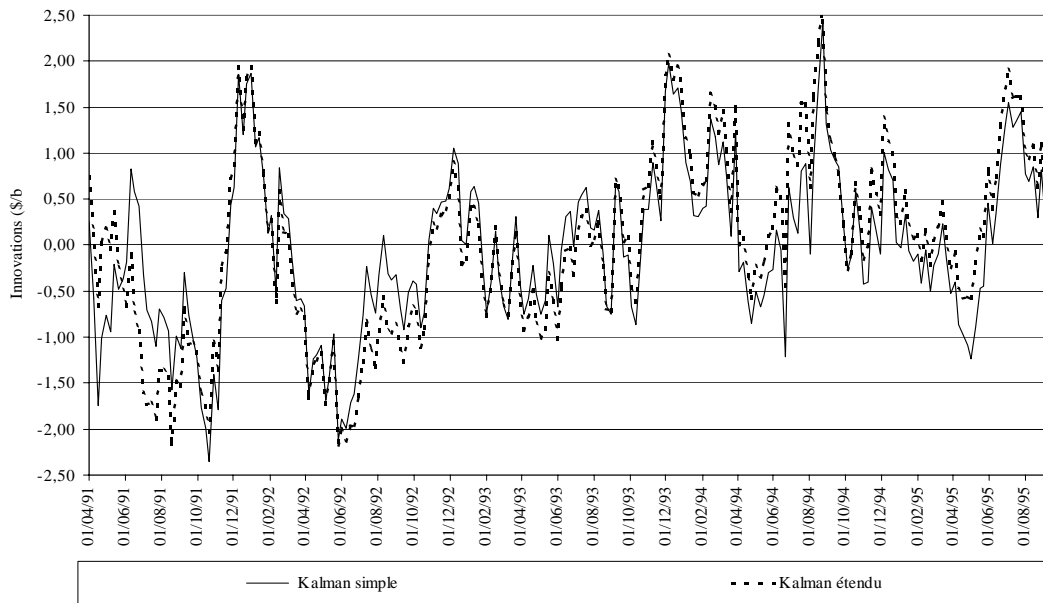


Comme le montre la figure 5.1, l'amplitude de fluctuation des prix estimés est généralement inférieure à celle des prix observés. Ces deux phénomènes se manifestent pour les deux filtres, sur toutes les maturités et pour les deux périodes.

Pour les deux périodes d'études, l'étude du comportement des innovations permet de montrer que, pour les deux filtres, celles-ci ont tendance à revenir vers une valeur proche de zéro. En revanche, comme l'illustre la figure 5.2, bien que l'erreur de prix moyenne sur les deux périodes d'étude soit relativement faible pour les deux filtres, les erreurs de prix à une date donnée peuvent atteindre des niveaux relativement élevés.

L'innovation maximale en valeur absolue, au cours de la période 1991-1995, est de 2,58 USD pour le filtre de Kalman étendu, soit 13,45% du prix à terme à un mois moyen. Elle est de 2,43 USD pour le filtre de Kalman simple, soit 12,7% du prix à terme à un mois moyen. Pour cette période et cette maturité, la moyenne des innovations représente 0,022% du prix moyen pour le filtre de Kalman étendu, et 0,24% pour le filtre de Kalman simple.

**Figure 5.2. Innovations, période 1991-1995**



L'innovation maximale en valeur absolue, pour le filtre de Kalman étendu, est de 3,44 USD au cours de la période 1995-1998, soit 17% du prix à terme à 1 mois moyen. Elle est de 3,21 USD soit 15,86% du prix moyen pour le filtre de Kalman simple. Pour cette période et cette maturité, la moyenne des innovations représente 0,4% du prix moyen à 1 mois pour le filtre de Kalman étendu, et 0,31% pour le filtre de Kalman simple.

L'amplitude des innovations diminue lorsque la maturité des contrats étudiés augmente, pour les deux périodes d'étude. L'innovation maximale en valeur absolue sur les prix à terme à 9 mois obtenue avec le filtre de Kalman étendu représente 10,13% du prix moyen. De même, celle associée au filtre de Kalman simple représente 9,92% du prix moyen. Les moyennes des innovations représentent 0,03% du prix moyen pour le filtre de Kalman étendu, et 0,17% du prix moyen pour le filtre de Kalman simple.

L'innovation maximale obtenue avec le filtre de Kalman étendu, pour la même maturité, représente 12% du prix moyen à 9 mois. Celle associée au filtre de Kalman simple représente 11,99% du prix moyen. La moyenne des innovations représente 1% du prix moyen à 9 mois pour le filtre de Kalman étendu, et 0,75% pour le filtre de Kalman simple.



### 3.1.3. Tests en extrapolation sur des périodes de 3 et 6 mois

Les écarts de performances observés entre le filtre de Kalman simple et le filtre de Kalman étendu s'inversent lorsque les paramètres optimaux d'une période donnée sont conservés afin de réaliser des prédictions de prix à terme et de variables d'état sur une période prolongeant la période d'apprentissage. Le modèle MR est alors plus performant en moyenne lorsque le filtre de Kalman étendu est utilisé, et ce pour les deux périodes d'étude, que le prolongement soit effectué sur une durée de trois ou de six mois, comme les tableaux 5.5 à 5.8 permettent de le remarquer.

**Tableau 5.5. Filtres de Kalman simple/étendu, tests sur trois mois, 1995**

Maturité	Kalman simple		Kalman étendu	
	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	1,265744	1,383457	0,576134	0,746481
3 mois	1,497351	1,55673	0,80006	0,891315
6 mois	1,53674	1,55769	0,843995	0,884185
9 mois	1,485571	1,496259	0,808833	0,835574
Moyenne	1,446352	1,498534	0,757256	0,839389

Les résultats obtenus pour une extrapolation sur trois mois sont cependant plus favorables au filtre de Kalman étendu lorsque les tests sont réalisés sur la période du 25 septembre 1995 au 25 décembre 1995 que lorsqu'ils le sont sur la période du 18 mai 1998 au 17 août 1998. Dans le premier cas en effet, quelle que soit la maturité considérée, les erreurs de prix moyennes et les RMSE sont nettement plus faibles avec le filtre de Kalman étendu. Dans le second cas, l'avantage du filtre de Kalman étendu cesse lorsque que les maturités étudiées atteignent six mois, bien que, en moyenne, il reste légèrement plus performant.

**Tableau 5.6. Filtres de Kalman simple/étendu, tests sur trois mois, 1998**

Maturité	Kalman simple		Kalman étendu	
	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	2,0138	2,2012	1,7392	1,8834
3 mois	1,3296	1,3749	1,2448	1,3084

6 mois	0,6512	0,755	0,7563	0,8691
9 mois	0,2710	0,5442	0,4883	0,6540
Moyenne	1,0664	1,2188	1,0572	1,1787

Les résultats obtenus pour une période de trois mois sont également valables lorsque l'extrapolation est de six mois. Le filtre de Kalman étendu améliore significativement les performances du modèle MR pour la période allant du 25 septembre 1995 au 25 mars 1996. De plus, sur cette période d'étude, les innovations évoluent de telle sorte que lorsque les tests de prédiction sont réalisés sur six mois et non plus sur trois, l'écart de performance en faveur du filtre de Kalman étendu, mesuré en terme de RMSE, augmente.

**Tableau 5.7. Filtres de Kalman simple/étendu, tests sur six mois, 1995-1996**

	Kalman simple		Kalman étendu	
	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	1,365216	1,589656	0,956029	1,235961
3 mois	1,947874	2,124001	1,438743	1,732629
6 mois	2,106031	2,293798	1,50067	1,78319
9 mois	2,078072	2,268427	1,419679	1,681152
Moyenne	1,874298	2,068971	1,681152	1,608233

Lorsque l'extrapolation est réalisée sur la période comprise entre le 18 mai 1998 et le 16 novembre 1998, la domination du filtre de Kalman étendu est moins prononcée. Celui-ci s'avère plus robuste que le filtre de Kalman simple uniquement pour les deux maturités les plus proches.

**Tableau 5.8. Filtres de Kalman simple/étendu, tests sur six mois, 1998**

Maturité	Kalman simple		Kalman étendu	
	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	1,4006	1,7263	1,2384	1,5204
3 mois	1,1362	1,2629	1,0793	1,2211
6 mois	0,7881	0,9298	0,8336	0,9747
9 mois	0,5127	0,7394	0,6161	0,7802
Moyenne	0,9594	1,1646	0,9419	1,1241

Les erreurs de prédictions n'évoluent pas de la même façon pour les deux périodes d'études considérées. Dans le premier cas (1995), elles augmentent, pour le filtre de Kalman simple comme pour le filtre de Kalman étendu, lorsque la période d'extrapolation est allongée. Ce résultat semble cohérent avec l'observation réalisée en sous-section 3.1, selon laquelle les paramètres ne sont pas constants dans le temps : plus l'on s'éloigne de la période d'estimation, et plus les erreurs de prédiction s'accroissent.

Pour la seconde période d'étude (1998) en revanche, les résultats obtenus sont plus difficiles à interpréter : les performances en termes de prédiction s'améliorent lorsque la période de tests en extrapolation est étendue, et ce pour les deux filtres. L'évolution des prix sur la période située au-delà de trois mois de la base d'apprentissage doit vraisemblablement se rapprocher de celle observée pour cette dernière.

#### *3.1.4. Conclusion*

Le filtre de Kalman étendu, moins performant lorsque les tests sont réalisés sur la base d'apprentissage, se révèle être plus robuste lorsqu'il est utilisé pour réaliser des prévisions. Ce résultat peut être interprété de la façon suivante : il est possible d'envisager le fait que sur la base utilisée pour estimer les paramètres, le filtre de Kalman simple effectuée, par rapport au filtre de Kalman étendu, un « sur-apprentissage » de telle sorte que, même si l'ajustement réalisé au moyen du filtre de Kalman étendu apparaît dans un premier temps comme moins satisfaisant, celui-ci semble plus fiable pour réaliser des tests en extrapolation. La linéarisation effectuée dans le cadre du filtre de Kalman étendu jouerait alors le rôle d'un stabilisateur en extrapolation.

Ces tests préliminaires permettent de montrer que la comparaison, sur la base d'apprentissage, du modèle MR estimé à l'aide d'un filtre de Kalman simple et du modèle AS estimé à l'aide d'un filtre de Kalman étendu, devra être établie en tenant compte de la présence d'un biais en faveur du modèle MR.

### 3.2. COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS AVEC ET SANS SIMULATIONS

Dans un second temps, le modèle MR est employé pour tester l'impact sur les performances de l'introduction de simulations dans la procédure d'estimation des paramètres et de reconstitution des variables d'état. Sur la période du 25 septembre 1995 au 11 mai 1998, lorsque le nombre de simulations par prix à terme est de 1000 (les simulations sont réalisées en utilisant un germe unique pour chacune des deux séries de variables gaussiennes générées<sup>26</sup>), les performances du modèle MR avec simulations sont comparables, bien que légèrement moins satisfaisantes, à celles obtenues en l'absence de simulations.

**Tableau 5.9. Filtres de Kalman étendu avec et sans simulations, période 1995-1998**

	Kalman étendu avec simulations (N=1000)		Kalman étendu sans simulations	
Maturité	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	0,086267	1,416327	0,0775	1,3972
3 mois	0,252031	1,300253	0,2145	1,3011
6 mois	0,263476	1,08322	0,2235	1,0861
9 mois	0,239117	0,88076	0,2029	0,8812
Moyenne	0,210223	1,170138	0,1796	1,1664

Compte tenu du temps de calcul nécessaire pour réaliser une optimisation avec 1000 simulations, des tests sont également réalisés avec 100 simulations :

**Tableau 5.10. Filtre de Kalman étendu avec 100 et 1000 simulations**

	Kalman étendu avec 100 simulations		Kalman étendu avec 1000 simulations	
Maturité	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	0,05496	1,55251	0,086267	1,416327
3 mois	0,10476	1,39399	0,252031	1,300253
6 mois	0,10307	1,13888	0,263476	1,08322
9 mois	0,09102	0,92205	0,239117	0,88076

<sup>26</sup> Voir la sous-section 1.4. de ce chapitre.

Moyenne	0,08845	1,25186	0,210223	1,170138
---------	---------	---------	----------	----------

Les performances du modèle se dégradent lorsque le nombre de simulations diminuent ; elles restent cependant suffisamment proches de celles obtenues sans simulations pour que les tests ultérieurs soient effectués avec 100 simulations. Enfin, ces résultats ne sont pas extrêmement sensibles aux germes utilisés pour générer les deux séries de variables gaussiennes.

Compte tenu de ces résultats, les études ayant pour objet de comparer les performances des modèles MR et AS sont menées en retenant un nombre de 100 simulations. La comparaison entre les deux modèles doit cependant être établie en prenant en considération le fait que deux approximations ayant un impact négatif sur les performances sont effectuées pour estimer les paramètres du modèle AS.

#### *SECTION 4. COMPARAISON DES PERFORMANCES DES MODELES MR ET AS*

Les études réalisées en section trois de ce chapitre ont permis de constater l'instabilité de la procédure d'optimisation, en particulier lorsque des simulations sont utilisées pour calculer les prix à terme. La fonction de vraisemblance étant caractérisée par la présence de minima locaux, il est nécessaire d'amorcer la procédure d'optimisation à partir d'un point se trouvant à proximité du minimum global.

Compte tenu de la complexité et de la nature fortement non linéaire de la relation associant les prix à terme aux variables d'état dans le modèle AS, il était prévisible que pour ce dernier, la procédure d'optimisation allait être encore plus instable que pour le modèle MR. Une série d'études préalables (4.1) a donc été menée avant d'aborder l'optimisation et la comparaison des deux modèles (4.2). Les études sont réalisées sur la période la plus réduite : du 25 septembre 1995 au 11 mai 1998.

## 4.1. ETUDES PREALABLES DU MODELE AS

Pour le modèle AS, huit paramètres optimaux doivent être déterminés. Ceci, associé à la nécessité de simuler les prix à terme au lieu de les calculer analytiquement, rend la procédure d'optimisation longue et délicate. Une série d'études préalables à l'optimisation est donc réalisée afin de limiter la durée des tests et de déterminer à partir de quelles valeurs des paramètres l'optimisation doit être amorcée afin de se rapprocher du minimum global de la fonction de vraisemblance. Ces études portent en premier lieu sur le coefficient d'asymétrie  $\beta$  (4.1.1), puis sur les autres paramètres dont dépend la dynamique du *convenience yield* (4.1.2).

### 4.1.1 Etude de la valeur du coefficient d'asymétrie

L'étude de l'évolution de la fonction de distribution du *convenience yield*, réalisée à l'aide d'une méthode Monte-Carlo, permet de montrer que la fonction de distribution de  $\tilde{C}$  devient très rapidement asymétrique lorsque  $\beta$  augmente (figure 5.3). Cette constatation, associée au fait que la valeur du *convenience yield* augmente rapidement lorsque l'asymétrie augmente<sup>27</sup>, permet de supposer que la valeur optimale de  $\beta$  est située entre 0,1 et 0,2. Les études ultérieures montrent que pour un niveau de  $\beta$  fixé à 0,2 la procédure d'optimisation est très instable. La valeur de 0,1 est donc retenue pour le paramètre  $\beta$ .

#### **Figure 5.3. Fonction de distribution de $\tilde{C}$ pour $\beta = 0,8$**

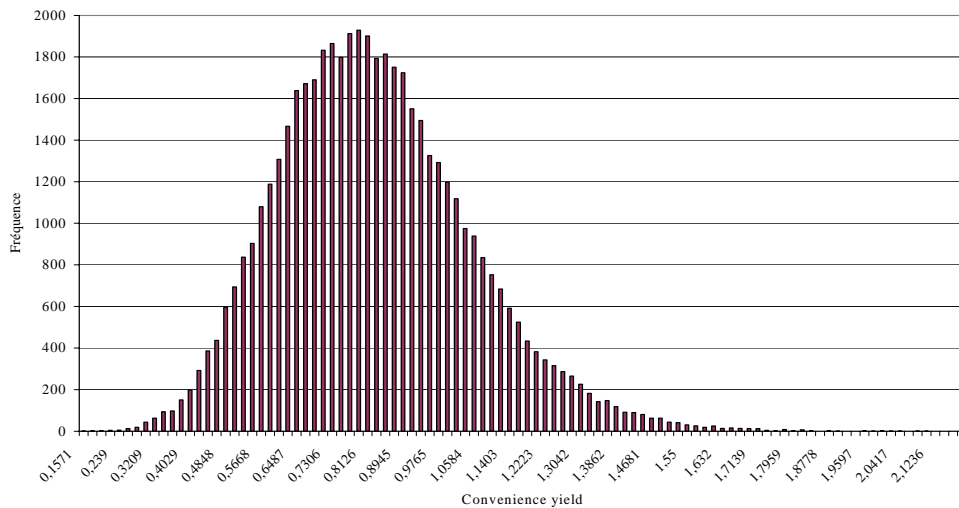
$C(0) = 0$  ;  $\kappa = 1,6$  ;  $\alpha = 0,1$  ;  $\lambda = 0,09$  ;  $\sigma_C = 0,6$  ; maturité : 2 mois

Longueur du pas de discrétisation : 1/800 ; Nombre d'intervalles de discrétisation : 133

Nombre de trajectoires simulées : 50 000

---

<sup>27</sup> Chapitre 4, sous-section 2.3.1, figure 4.7.



#### 4.1.2 Etude des autres paramètres associés au *convenience yield*

Une première série d'études empiriques réalisées en ne fixant que la valeur du paramètre  $\beta$ , et en optimisant sur les sept paramètres restant, confirment les craintes que les tests réalisés à l'aide du modèle MR avaient fait naître : la procédure d'optimisation est instable, et lorsqu'elle est menée en fixant uniquement la valeur de  $\beta$ , celle-ci aboutit à des minima locaux, pour lesquels les paramètres n'ont aucune signification économique.

Afin de pallier cette difficulté, le nombre de paramètres sur lesquels porte l'optimisation a été réduit : les paramètres associés à la dynamique du *convenience yield*, à savoir la prime de risque associée à cette variable d'état,  $\lambda$ , le paramètre  $\alpha$  (qui ne correspond plus vraiment, compte tenu de l'expression de la dynamique de  $\tilde{C}$ , à une valeur moyenne à long terme,) la volatilité du *convenience yield*  $\sigma_C$ , et la force de rappel  $\kappa$  ont été fixés a priori. L'optimisation a été menée sur trois paramètres : le coefficient de corrélation entre les mouvements browniens standard du prix au comptant et du *convenience yield*,  $\rho$ , la volatilité du prix au comptant  $\sigma_S$ , et la tendance du prix au comptant  $\mu$ .

Dans un premier temps, les paramètres  $\kappa$ ,  $\lambda$  et  $\sigma_C$  associés au *convenience yield* ont été fixés en utilisant les valeurs obtenues à partir du modèle MR, avec le

filtre de Kalman simple. La valeur du paramètre  $\alpha$  a été calculée de telle sorte que l'espérance du *convenience yield* du modèle AS soit, sur la période étudiée, identique à celle du modèle MR. Compte tenu de la faible valeur retenue pour le paramètre  $\beta$ , cette hypothèse semblait acceptable. A l'issue de cette étude, le modèle AS présentait, par rapport au modèle MR, un biais positif important en terme d'erreurs de prix moyenne. Cependant, excepté ce biais, la représentation des prix à terme obtenue semblait beaucoup plus proche des prix observés que celle issue du modèle MR.

Les valeurs des paramètres  $\kappa$ ,  $\sigma_C$  et  $\alpha$  ont alors été déterminées, en conservant l'hypothèse d'égalité des espérances des *convenience yields* des modèles MR et AS, de telle sorte que ce biais s'amenuise.

#### 4.2. COMPARAISON DES PERFORMANCES DES MODELES MR ET AS

Les comparaisons portent sur les performances du modèle MR avec un filtre de Kalman simple, et sur celles du modèle AS, avec un filtre de Kalman étendu, 100 simulations par prix à terme, et une optimisation sur trois paramètres : la volatilité du prix au comptant, la tendance du prix au comptant, et le coefficient de corrélation associant les deux mouvements browniens du modèle.

La valeur du coefficient d'asymétrie  $\beta$ , compte tenu des tests réalisés précédemment est fixée à 0,1. La valeur de la prime de risque associée au *convenience yield*,  $\lambda$ , est identique à celle estimée à l'aide du filtre de Kalman simple, pour la période 1995-1998. Enfin, les valeurs de  $\alpha$ , de la force de rappel associée au *convenience yield*,  $\kappa$ , et de la volatilité associée à cette variable d'état,  $\sigma_C$ , sont fixées de telle sorte que sur l'ensemble de la période, l'espérance du *convenience yield* du modèle AS soit identique à celle du *convenience yield* du modèle MR. Ces valeurs sont les suivantes :  $\sigma_C = 0,8$  ;  $\kappa = 1,75$  ; et  $\alpha = -0,1175$ . Les valeurs des autres paramètres obtenus au terme de la simulation sont les suivantes :  $\mu = 0,99$  ;  $\sigma_S = 0,56$  ;  $\rho = 0,77$ . Pour ce jeu de paramètres, les performances comparées des modèles MR et AS sont les suivantes :

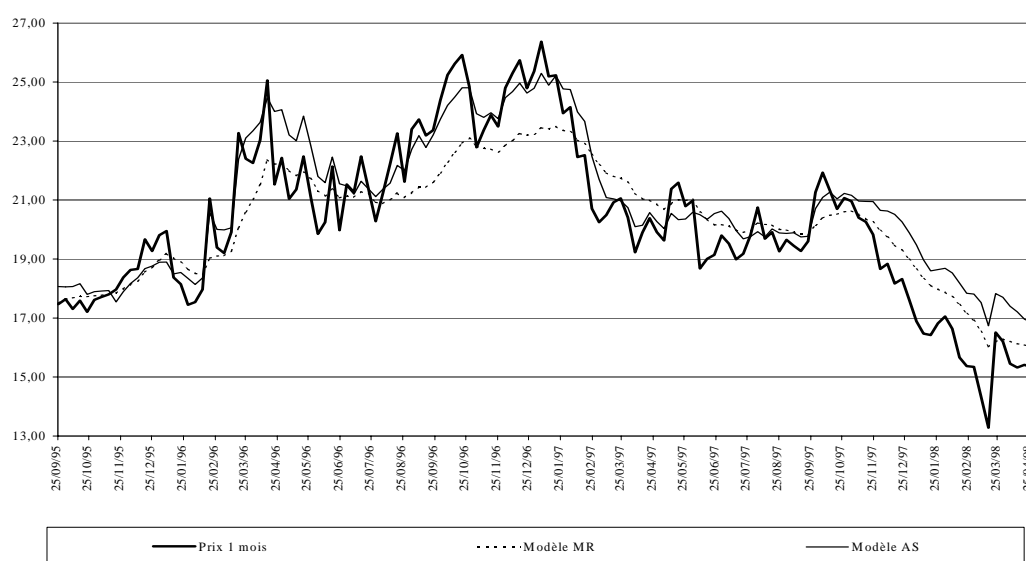


**Tableau 5.11 Comparaison des performances des modèles MR et AS, 1995-1998**

	Modèle MR, Kalman simple		Modèle AS, 100 simulations	
Maturités	MPE	RMSE	MPE	RMSE
1 mois	-0,063	1,2769	0,55235	1,17353
3 mois	0,1064	1,1804	0,10971	1,13795
6 mois	0,1453	1,0142	-0,32219	1,07949
9 mois	0,1419	0,8468	-0,65184	1,09910
Moyenne	0,0827	1,0796	-0,07799	1,1225

La représentation graphique des prix à terme estimés et observés permet de constater que le modèle AS, pour les prix à terme à 1 mois, représente mieux l'évolution des prix observés que le modèle MR. Il est également beaucoup plus volatil.

**Figure 5.4. Prix à terme estimés/observés, modèles MR et AS, 1995-1998**



L'optimisation, dans le cadre du modèle AS, n'est pas réalisée de façon optimale : la valeur de plusieurs paramètres est fixée, l'optimisation ne portant que sur trois d'entre eux. Cependant, compte tenu des difficultés rencontrées au cours de la procédure d'optimisation, ces manipulations permettent d'obtenir des paramètres ayant des ordres de grandeur satisfaisants pour le modèle AS. Avec ces paramètres,

le modèle AS, bien qu'il soit estimé en introduisant deux approximations, est plus performant que le modèle MR sur les plus faibles maturités.

## SECTION 5. CONCLUSION

Au terme de cette étude, les résultats obtenus permettent de penser que l'hypothèse d'asymétrie du *convenience yield* est vérifiée : les paramètres estimés atteignent des grandeurs cohérentes sur le plan économique, et le modèle AS, malgré les deux approximations réalisées, semble représenter de façon satisfaisante le comportement des prix à terme. Ces travaux doivent cependant être poursuivis : en particulier, la procédure d'optimisation doit être améliorée ; de plus, des modifications du modèle peuvent être envisagées.

Les difficultés rencontrées lors de l'estimation des paramètres laissent penser que le filtre de Kalman n'est vraisemblablement pas la méthode la mieux adaptée au problème étudié, et ce pour plusieurs raisons : en premier lieu, il est possible que la linéarisation effectuée dans le cadre du filtre de Kalman étendu constitue une approximation trop importante compte tenu du caractère fortement non linéaire de la fonction associant les prix à terme aux variables d'état dans le modèle AS.

Plus généralement, le filtre de Kalman n'est pas nécessairement la seule voie envisageable pour résoudre le problème inverse que constitue la présence de variables non observables dans les modèles de structure par terme des prix des commodités. Le filtre de Kalman n'est pas une méthode d'inversion en tant que telle : c'est en lui associant la procédure de maximisation du logarithme de la fonction de vraisemblance qu'il est possible d'obtenir les paramètres du modèle et, par conséquent, les séries temporelles de variables d'état. Dans les deux modèles étudiés, la fonction de vraisemblance est une fonction non linéaire des paramètres. Utiliser cette dernière pour estimer les paramètres introduit donc une difficulté supplémentaire dans la procédure d'optimisation.

L'emploi de méthodes d'inversion plus classiques semble donc une voie à explorer. Au lieu d'estimer les paramètres du modèle à partir de la fonction de vraisemblance, ceux-ci pourraient être obtenus plus simplement, en minimisant la

somme des carrés des innovations, à laquelle serait ajouté un terme de pénalité afin d'assurer la stabilité de la procédure d'optimisation. Ce travail, pouvant constituer en lui-même l'objet d'une thèse, n'a pas encore été abordé.

Enfin, le modèle AS pourrait être modifié dans le but de diminuer son caractère non linéaire : en supposant, compte tenu des études réalisées précédemment<sup>28</sup>, que le paramètre  $\beta$  est très inférieur à 1, il est en effet possible de linéariser partiellement l'exponentielle de la fonction associant les prix à terme aux variables d'état dans le modèle AS. La solution de ce modèle est la suivante :

$$F(t, T) = S(t) \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C(t)) \times E_t^Q \left[ \exp \left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T (\exp D(v) + B(v)) dv \right) \right] \quad (AS5)$$

$$\text{Avec : } H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}, \quad \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}, \quad A(\tau) = \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \tau + \hat{\alpha} (1 - \beta) (H - \tau) \right)$$

$$B(v) = \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y), \quad D(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) e^{-\kappa(v-t)}$$

Si  $\beta \ll 1$ , l'exponentielle de l'équation (AS5) peut être modifiée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \exp \left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T (\exp D(v) + B(v)) dv \right) \\ & \approx \exp \left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - \int_t^T B(v) dv \right) \times \left( 1 + \beta \times \left( \int_t^T B(v) dv - \int_t^T (\exp D(v) + B(v)) dv \right) \right) \end{aligned}$$

Pour tester cette nouvelle version du modèle AS, il serait préférable de disposer d'une méthode d'optimisation plus stable que celle utilisée jusqu'à présent. Ces travaux constitueront le prolongement naturel des études réalisées dans le cadre de cette thèse.

<sup>28</sup> Sous-section 4.1 de ce chapitre.



## **CHAPITRE 6 : ETUDE DE PROJETS D'INVESTISSEMENT**

A l'aide d'un modèle de structure par terme des prix des commodités, il est possible de déterminer un prix à terme - l'anticipation, compte tenu de l'information disponible à ce jour, du prix au comptant futur - pour une échéance très éloignée dans le temps. Les décisions d'investissement reposant sur l'évaluation des flux de trésorerie futurs associés à un projet, l'emploi de ces modèles à l'étude de projets d'investissement semble intéressant. Appliqués au marché pétrolier, ces modèles permettent de déterminer la valeur présente d'un baril de pétrole produit dans plusieurs années. Ils offrent de plus la possibilité d'aborder l'analyse des projets d'investissement sous un angle nouveau, prenant en considération le caractère optionnel que peut revêtir la détention d'un gisement.

La première section de ce chapitre est consacrée à la présentation des méthodes traditionnelles d'analyse des projets d'investissement. Parmi les différents critères de sélection des projets d'investissement, la valeur actuelle nette est le plus fréquemment employé. Bien que les limites de cette dernière soient fréquemment dénoncées, elle reste très largement utilisée, sa simplicité de mise en œuvre étant son principal atout.

Par rapport aux méthodes d'analyse traditionnelles, le recours aux méthodes de valorisation relative présente un double intérêt : à l'aide des modèles de structure par terme des prix des commodités, il est possible de prendre en considération le caractère aléatoire du prix du produit lors de la valorisation des flux futurs associés à un projet, et de tenir compte de l'option représentée par la possibilité de retarder une décision d'investissement. Cette approche optionnelle, présentée en seconde section de ce chapitre, apparaît comme pertinente pour l'étude de projets d'investissements miniers : dans le domaine des commodités minérales, les investissements sont en

effet irréversibles. L'importance accordée à la possibilité de reporter un investissement s'en trouve accrue.

La troisième section permet de montrer, à travers l'étude d'un projet d'exploitation de gisement pétrolier, dans quelle mesure la valeur d'un projet et la décision d'investissement sont sensibles à la méthode d'analyse retenue. Une comparaison est établie entre les résultats obtenus à partir d'une approche traditionnelle et d'une approche optionnelle. Les modèles MR et BG, présentés au quatrième chapitre de cette thèse, sont employés dans l'approche optionnelle pour valoriser les flux futurs associés à un projet et déterminer à quel prix au comptant il est intéressant d'investir. Bien que le modèle BG ne représente pas le comportement des prix à terme pour une échéance éloignée de façon très satisfaisante, la comparaison des modèles MR et BG permet d'apprécier l'impact sur la valeur du projet de différentes hypothèses relatives à la dynamique du prix au comptant.

## *SECTION 1. ANALYSE DES PROJETS D'INVESTISSEMENT : L'APPROCHE TRADITIONNELLE*

La décision d'investissement repose, en premier lieu, sur l'évaluation quantitative des biens ou services employés et produits par un projet (1.1) ; elle dépend de plus du critère de choix d'investissement retenu pour apprécier l'intérêt du projet (1.2). Enfin, dans la mesure où investir suppose de renoncer temporairement à l'usage de fonds aujourd'hui disponibles dans l'attente d'une plus grande richesse ultérieure, elle dépend également du taux d'actualisation appliqué au projet (1.3).

### **1.1. EVALUATION DES FLUX ASSOCIES A UN PROJET**

Trois catégories de flux peuvent être distinguées dans l'analyse d'un projet : les dépenses d'investissement (1.1.1), les flux nets de trésorerie induits par l'exploitation (1.1.2), et la valeur résiduelle du projet (1.1.3).

### *1.1.1. L'évaluation de l'investissement initial*

Les dépenses permettant de réaliser un investissement comprennent principalement les études techniques et commerciales, l'acquisition d'immobilisations corporelles et incorporelles nécessaires au développement du projet, et l'augmentation du besoin de financement du cycle d'exploitation<sup>1</sup>. Lorsque des biens antérieurement acquis par l'entreprise sont affectés au projet d'investissement, le coût d'opportunité associé à leur mobilisation doit être ajouté aux dépenses. Ce coût est le plus souvent apprécié par la valeur de marché des biens employés.

### *1.1.2. Les flux d'exploitation*

Les flux nets de trésorerie générés par un projet d'investissement sont mesurés par le solde des recettes et des dépenses induites par l'exploitation. Les principales sources d'incertitude affectant l'évaluation de ces flux sont l'évolution, au cours de la durée de vie du projet, du prix du produit final, de la fiscalité, de la réglementation, de la technologie de production... Cette incertitude croît avec la durée de vie du projet.

Les flux nets de trésorerie sont évalués indépendamment des modalités de financement du projet : un projet doit être rentable, économiquement, quels que soient les moyens mis en œuvre pour le financer<sup>2</sup>. Le risque associé à ces flux est le plus souvent pris en considération lors de la détermination du taux d'actualisation du projet (1.3.3).

---

<sup>1</sup> Après déduction des crédits accordés par les fournisseurs, le projet mobilise des ressources sous forme de stocks et de délais de paiement accordés aux clients.

<sup>2</sup> Ainsi, l'économie fiscale associée aux charges financières qui apparaîtraient si le projet devait être financé par emprunt n'est pas prise en considération lors de la détermination des flux nets de trésorerie. En revanche, l'imposition du produit des ventes et l'économie fiscale sur les amortissements sont intégrées, car elles modifient le montant des ressources à la disposition de l'entreprise. Enfin, bien que les éléments constitutifs des flux de trésorerie ne soient pas affectés à l'identique par les pressions inflationnistes, un taux général d'inflation est le plus souvent appliqué à l'ensemble des recettes et dépenses.

### *1.1.3. La valeur résiduelle du projet*

La valeur résiduelle d'un projet est estimée en retenant les éléments constitutifs de l'investissement survivant à celui-ci lorsqu'il atteint sa durée de vie maximale : constructions, terrains, besoin de financement du cycle d'exploitation, etc. Elle peut également inclure des frais de démantèlement du projet, et les coûts de restauration du site sur lequel il était exploité. Le calcul de la valeur résiduelle est fréquemment effectué pour un horizon inférieur à celui de l'investissement. Dans ce contexte, l'estimation de la valeur résiduelle est réalisée en supposant que le projet sera revendu au-delà d'un horizon donné, fixé arbitrairement par l'entreprise. Même si ce désinvestissement n'est pas effectivement envisagé, cette méthode permet de pallier le fait qu'au-delà d'un certain horizon, les prévisions sont peu fiables.

## **1.2. LES CRITERES DE CHOIX D'INVESTISSEMENT**

L'analyse traditionnelle repose principalement sur trois critères de sélection des projets d'investissement, non nécessairement exclusifs les uns des autres : le délai de retour sur investissement (1.2.1), la valeur actuelle nette (1.2.2) et le taux interne de rendement (1.2.3). A ces critères sont associés une loi d'investissement guidant la décision d'adopter un projet ou d'y renoncer. Leur utilisation a également pour objectif d'assurer l'allocation optimale des ressources limitées de la firme, en établissant un classement entre projets d'investissement concurrents. Selon le principe d'additivité de la valeur<sup>3</sup>, chaque projet peut être considéré indépendamment des autres, de telle sorte que parmi des projets exclusifs, le projet sélectionné est celui qui maximise la richesse de la firme.

### *1.2.1. Délai de retour sur investissement*

Le critère de retour sur investissement mesure la rentabilité d'un projet d'investissement par une durée : le délai de retour sur investissement correspond à la période au terme de laquelle un investissement a rapporté une somme identique à

---

<sup>3</sup> Principe d'additivité de la valeur : si la valeur de chaque projet accepté par la firme est connue, alors la valeur de la firme est égale à la somme des valeurs des projets.



celle mobilisée pour sa mise en œuvre. La hiérarchie entre projets concurrents est établie en privilégiant celui dont le délai de récupération est le plus bref. Cette comparaison n'est pertinente que si les différents projets étudiés ont des durées de vie équivalentes et sont caractérisés par des flux de trésorerie réguliers.

Le critère de retour sur investissement présente de nombreux inconvénients : selon ce critère, un projet est rejeté dès que son délai de récupération est supérieur à une durée de référence établie par l'investisseur. La loi d'investissement associée au délai de récupération repose donc sur une appréciation subjective du temps concédé à un investissement pour rembourser la mise de fond initiale. De plus, le critère de délai de récupération privilégie la notion de liquidité et n'apporte aucune information sur la richesse générée par un projet. Une fois le capital remboursé, les revenus engendrés sont en effet totalement ignorés.

Les limites de ce critère de sélection conduisent donc à le considérer comme le complément mais pas comme le substitut d'une analyse de la rentabilité des projets d'investissement menée à l'aide d'un critère tel que la valeur actuelle nette ou le taux interne de rendement. Pour deux projets ayant des durées de vie différentes mais une rentabilité comparable, l'entreprise peut par exemple accorder sa préférence à celui qui mobilisera le moins longtemps ses ressources.

### *1.2.2. Valeur actuelle nette*

La valeur actuelle nette (VAN) est sans doute le critère de sélection des projets d'investissement le plus couramment utilisé. La VAN représente la trésorerie nette qu'un projet peut générer, c'est-à-dire la somme des flux nets d'exploitation diminués des flux d'investissement. Selon ce critère, la rentabilité d'un projet d'investissement est évaluée en mesurant la richesse qu'il peut apporter à l'entreprise. Pour être accepté, un projet doit dégager un revenu au moins équivalent aux ressources qu'il a mobilisées.

Le surplus futur généré par un projet est estimé à la période présente, ce qui implique la détermination d'un taux d'actualisation. Cette question sera abordée en sous-section 1.2.3, le taux d'actualisation étant momentanément, pour la clarté de la

présentation, supposé unique et constant. Dans ces conditions, la VAN peut être exprimée de la façon suivante :

$$VAN = \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+a)^k} + \frac{V_r}{(1+a)^n} - I_0$$

Avec : -  $n$  : durée de vie du projet, exprimée en années,

-  $F_k$  : flux net de trésorerie de l'année  $k$ ,

-  $a$  : taux d'actualisation,

-  $V_r$  : valeur résiduelle du projet,

-  $I_0$  : investissement initial.

La loi d'investissement associée au critère de la VAN est la suivante : le seuil de rentabilité exigé pour un projet est atteint dès que la VAN est égale à zéro. Une VAN nulle signifie que la somme actualisée des flux associés au projet a permis le remboursement du capital investi et sa rémunération au taux d'actualisation  $a$ , les intérêts étant composés. Dans ce contexte, le taux d'actualisation choisi par la firme est identifié à un taux de rentabilité minimal exigé par les apporteurs de fonds<sup>4</sup>.

Des projets concurrents peuvent être comparés en utilisant le critère de la VAN, à condition que le montant de leur investissement initial et leur durée de vie soient identiques. Dans ce cas, le projet caractérisé par la VAN la plus importante est privilégié. En revanche, lorsque les projets comparés ne sont pas homogènes, la VAN privilégie les projets de grande envergure, qui génèrent le plus de richesse.

Le critère de la VAN présente un certain nombre de limites : il suppose en premier lieu que l'échéance de placement des flux générés par l'investissement est connue de façon certaine à la date d'évaluation du projet, en second lieu que le taux d'actualisation est unique et constant. Cette dernière hypothèse revient à considérer que la structure par terme des taux d'intérêt est plate, ce qui est d'autant plus gênant que la durée de vie de l'investissement considéré est longue.

---

<sup>4</sup> La VAN suppose que le réinvestissement des flux nets de trésorerie est réalisé au taux d'actualisation. Cette hypothèse d'identité entre le taux de prêt et le taux d'emprunt peut cependant être levée. Dans ce cas, une VAN globale, opérant une distinction entre ces deux taux, est calculée.

### *1.2.3. Taux interne de rendement.*

Le taux interne de rendement (TIR) est le taux qui annule la VAN. Il représente donc le taux d'intérêt implicite généré par l'investissement. Lorsque ce critère de sélection est utilisé, les flux net de trésorerie associés au projet sont supposés être réinvestis au TIR. Comme la VAN, le TIR privilégie la contrainte de rentabilité.

Le TIR est un taux spécifique à un projet d'investissement donné : il ne constitue donc pas en soit une norme permettant d'apprécier la rentabilité d'un projet. Pour sélectionner un projet rentable, le TIR doit être comparé au coût des ressources de l'entreprise, c'est-à-dire au taux d'actualisation utilisé dans le calcul de la VAN. La loi d'investissement associée au TIR peut donc être identifiée à celle énoncée lors de la présentation de la VAN : un projet est retenu dès que son TIR est supérieur ou égal au coût des ressources de la firme, c'est-à-dire lorsque sa VAN est positive. La comparaison de plusieurs projets concurrents conduit à privilégier celui dont le TIR est non seulement le plus élevé, mais également supérieur ou égal au coût des ressources.

Le taux interne de rendement d'un projet n'est cependant unique que si les flux associés à l'investissement sont tous positifs à l'exception des dépenses initiales : dans ce cas, la VAN est en effet une fonction continue, monotone et décroissante du taux d'actualisation. Dans le cas contraire en revanche, des TIR multiples peuvent apparaître, et ce critère de sélection n'est plus pertinent.

L'utilisation du taux de rendement interne et de la valeur actuelle nette pour comparer deux projets mutuellement exclusifs peut conduire à des résultats contradictoires : ce phénomène est lié à l'existence d'hypothèses différentes, pour chacun des deux critères, concernant le taux de réinvestissement des flux de trésorerie associés à un projet. Dans le cas du TIR, ces flux sont réinvestis au taux interne de rendement<sup>5</sup> ; dans celui de la VAN, le taux de réinvestissement est le taux d'actualisation. En cas de contradiction, le critère de la VAN doit être préféré : le

---

<sup>5</sup> Le TIR global, qui lève l'hypothèse selon laquelle les flux de trésorerie intermédiaires sont réinvestis au taux de rendement interne, est défini comme le taux qui annule la VAN Globale.

taux d'actualisation, qui représente une exigence de rendement de la part des apporteurs de fonds, est une meilleure représentation du taux de réinvestissement que le TIR. De plus, le critère de la VAN peut être appliqué à des investissements dont le profil des flux futurs est complexe, ce qui n'est pas le cas du TIR.

### 1.3. L'ACTUALISATION DES FLUX FUTURS

Pour mesurer la rentabilité d'un investissement, il faut comparer la richesse qu'il peut générer au coût des ressources qu'il mobilise. Le taux d'actualisation reflète ce coût. Il est déterminé en prenant en considération l'inflation (1.3.1) et les différentes sources de financement employées (1.3.2). Il reflète également le risque du projet (1.3.3).

#### *1.3.1. L'inflation*

Indépendamment du degré de préférence pour le présent des apporteurs de fonds, en présence d'inflation, l'argent a une valeur différente lorsqu'il est dépensé aujourd'hui ou plus tard. Lorsque l'évaluation des flux futurs associés au projet a été réalisée en prenant en considération l'inflation, le taux d'actualisation utilisé dans le calcul de la VAN d'un projet doit lui aussi intégrer cet élément<sup>6</sup>.

#### *1.3.2. Le coût du capital*

Très souvent, le coût des ressources employées au financement d'un projet (coût du capital) s'identifie au coût moyen pondéré du capital de l'entreprise (CMPC). Celui-ci est égal au coût des différentes sources de financement employées, pondérées par leur poids dans le passif de la firme. Ces sources de financement sont généralement distinguées selon deux catégories : les capitaux propres et l'endettement<sup>7</sup>.

---

<sup>6</sup> En pratique, l'impact de l'inflation est le plus souvent pris en considération dans le coût des ressources utilisées pour financer le projet.

<sup>7</sup> Ces ressources se distinguent l'une de l'autre par leur caractère permanent ou non, par la forme de rémunération qui leur est associée, et par le statut de l'investisseur.

Le coût de la dette est évalué, en l'absence d'impôts, à partir du taux actuariel égalisant le montant emprunté et la somme actualisée des versements réalisés pour rembourser l'emprunt. L'estimation du coût des capitaux propres est plus délicate. Il correspond au taux de rentabilité exigé par les actionnaires de la firme compte tenu du risque économique et financier supporté par celle-ci<sup>8</sup> et peut par exemple être évalué en utilisant le modèle d'équilibre des actifs financiers (*Capital Asset Pricing Model*)<sup>9</sup>.

En supposant le coût des deux principales sources de financement de l'entreprise connu<sup>10</sup>, le coût moyen pondéré du capital est calculé de la façon suivante :

$$CMPC = k_c \frac{C}{C + D} + k_D \frac{D}{C + D}$$

Avec : -  $k_C$  : coût des fonds propres,

-  $k_D$  : coût de l'endettement après impôt<sup>11</sup>,

-  $C$  : valeur des capitaux propres,

-  $D$  : valeur de la dette.

Au-delà des difficultés que peut présenter l'estimation du coût de ces différentes ressources, l'utilisation du coût moyen pondéré du capital présente certaines limites : celui-ci est en effet généralement calculé à partir de la structure de financement présente de la firme, en considérant que la pondération de chaque source de financement dans le passif sera stable à long terme. Cette méthode néglige donc la possibilité offerte à la firme de changer de politique de financement. Elle exclut également la possibilité que la taille du projet considéré modifie

---

<sup>8</sup> Le risque économique représente le risque associé à l'activité de la firme. Le risque financier est lié à la structure de financement que la firme a choisi : une firme fortement endettée supporte un risque financier plus élevé qu'une firme non endettée.

<sup>9</sup> Le CAPM a été présenté au chapitre un. La méthode du rendement et de la croissance, permettant de calculer le coût des capitaux propres à partir de la valeur de l'action d'une entreprise et d'une hypothèse relative à l'évolution future des dividendes, peut également être utilisée pour les entreprises cotées. Elle est complémentaire et non concurrente de celle du CAPM.

<sup>10</sup> En pratique, avec le développement de nouvelles formes de financement intermédiaires entre les fonds propres et l'endettement, la tâche consistant à déterminer le coût de chaque source de financement est plus délicate que cette présentation pourrait le laisser penser.

<sup>11</sup> Pour les entreprises soumises à l'impôt sur le revenu, les charges d'intérêt associées aux emprunts sont déductibles.

fondamentalement la structure financière de la firme<sup>12</sup>. Enfin, le CMPC n'est un taux d'actualisation pertinent que si le projet d'investissement considéré présente un niveau de risque comparable à celui de la firme et se situe dans le même cadre d'activité que l'entreprise.

### *1.3.3. La mesure du risque*

Lorsque le risque associé à un projet d'investissement diffère de celui de la firme, un coût moyen pondéré du capital spécifique au projet doit être calculé. Le coût des capitaux propres pour des investissements appartenant à une classe de risque équivalente à celle du projet doit alors être déterminé. Ce coût peut être évalué en utilisant le CAPM.

Sur le plan pratique, l'emploi du CAPM présente un certain nombre de difficultés : en particulier, il nécessite la détermination d'un portefeuille parfaitement diversifié, rassemblant les différentes opportunités d'investissement. Dans ce cadre d'analyse, il pourrait être constitué de l'ensemble des projets d'investissement productifs. Il est cependant peu probable qu'un tel portefeuille, composé uniquement d'actifs réels, est parfaitement diversifié. Les coûts de transaction sur le marché des investissements réels sont en effet bien supérieurs à ceux caractérisant les marchés financiers. Il semble donc préférable de définir le portefeuille de marché comme la réunion de titres des firmes cotées appartenant à la même classe de risque que le projet.

Constituer le portefeuille de marché de la sorte conduit à déterminer le bêta d'un projet individuel à partir du bêta historique des titres des firmes prises en considération. Là encore, cette approche est limitée car, cette variable n'étant pas constante dans le temps, il faudrait disposer d'un bêta anticipé. Par ailleurs, ce bêta est estimé pour des firmes caractérisées par un endettement qui peut être différent de celui du projet. Pour obtenir le coût des capitaux propres applicable au projet, il faut

---

<sup>12</sup> L'idéal serait de calculer le coût moyen pondéré du capital à partir de la structure de financement anticipée de la firme, ce qui, là encore, présente des difficultés pratiques considérables.

donc corriger le bêta estimé en fonction de la structure de financement retenue pour le projet.

Que le risque d'un projet d'investissement soit identique ou non à celui de la firme qui envisage d'investir, la détermination d'un taux d'actualisation ajusté du risque est sans doute la plus grande difficulté rencontrée dans le cadre de l'analyse traditionnelle des projets d'investissement.

#### 1.4. CONCLUSION

La VAN est l'instrument privilégié de l'analyse traditionnelle des investissements : c'est en effet le seul critère apportant une information sur la richesse créée par un projet. En pratique cependant, dans de nombreux cas, la loi d'investissement associée à ce critère n'est pas tout à fait respectée : soit les entreprises exigent, pour investir, que la VAN du projet considéré soit très largement positive, soit elles calculent la VAN en utilisant un taux d'actualisation bien supérieur au coût moyen pondéré du capital. Ainsi, les entreprises appartenant à un même secteur utilisent fréquemment un taux identique.

Si la loi d'investissement associée à la VAN n'est pas respectée en pratique, c'est parce que ce critère n'est pas tout à fait adapté à la sélection d'investissements productifs : il ignore le fait que l'investisseur puisse adopter une démarche active dans son comportement d'investissement, et puisse en particulier avoir le désir de modifier ses décisions lorsque son environnement évolue. Les méthodes de flux futurs actualisés, développées à l'origine pour évaluer des titres financiers, supposent en effet que les investisseurs ont une attitude essentiellement passive quant aux rendements de leurs investissements, ce qui n'est pas le cas lorsque l'investissement considéré est de type productif.

L'utilisation d'une approche optionnelle pour sélectionner les projets d'investissement est un moyen de répondre aux différents inconvénients que présente l'analyse traditionnelle.

## SECTION 2. L'APPROCHE OPTIONNELLE DE L'INVESTISSEMENT

A l'aide des modèles de structure par terme des prix des commodités, il est possible de valoriser les flux nets de trésorerie futurs associés à un projet en intégrant le caractère aléatoire du prix du produit final (2.1) ; de plus, l'emploi de ces modèles permet d'écarter la question délicate du choix d'un taux d'actualisation ajusté du risque (2.2). Enfin, l'option d'attendre le développement d'un projet peut être prise en considération, ce qui est important lorsque les projets d'investissement considérés sont irréversibles (2.3). Dans ce cas, la décision d'investissement repose sur la détermination du niveau de prix optimal auquel exercer l'option (2.4).

### 2.1. LA VALORISATION DES FLUX FUTURS

Les marchés de commodités minérales sont caractérisés par une incertitude particulièrement importante concernant le niveau des prix futurs. Lorsque les méthodes traditionnelles sont utilisées pour valoriser un projet d'investissement dans le secteur minier, les prix futurs sont généralement estimés en considérant que le prix va rester stable au cours de la durée de vie du projet ou en utilisant une moyenne de prévision d'évolution commune à l'industrie. Le caractère aléatoire des prix futurs est le plus souvent pris en considération au niveau du taux d'actualisation : l'incertitude associée à l'évolution des prix conduit, lorsque la VAN est utilisée, à augmenter le taux d'actualisation. Cette méthode se révèle d'autant moins satisfaisante que la volatilité des prix du bien considéré est importante : elle est en effet susceptible de générer des erreurs d'estimation non seulement dans le calcul des flux futurs anticipés mais encore dans la détermination du taux d'actualisation. La probabilité pour que les décisions d'investissement ne soient pas optimales est donc élevée.

Les modèles de structure par terme des prix permettent d'obtenir une représentation, à une date  $t$ , de ce que seront les prix au comptant futurs, pour n'importe quelle échéance. Ils offrent donc un moyen plus rigoureux de prévision des prix que la méthode employée dans le cadre de l'analyse traditionnelle. Si l'on considère que l'incertitude liée au niveau des prix futurs est celle qui affecte le plus



fortement la valeur des projets d'investissement dans les marchés de commodités minérales, cet apport devient décisif. La capacité d'un modèle à valoriser correctement un projet dépendra de ses performances en termes de représentation des prix futurs.

## 2.2. L'ACTUALISATION

Dans le cadre des méthodes traditionnelles de sélection des projets d'investissement, fondées sur l'actualisation des flux futurs, la principale difficulté rencontrée est celle du choix d'un taux d'actualisation adéquat. Lorsque le recours à la valeur actuelle nette comme critère de sélection est associé à l'emploi d'un taux d'actualisation plus élevé que le coût moyen pondéré du capital de la firme ou du projet, aucune référence précise ne permet de guider le choix de ce taux. Ceci est particulièrement dommageable car la mesure de la richesse générée par un investissement est extrêmement sensible au taux d'actualisation retenu (sous-section 3.3.1 de ce chapitre).

L'utilisation des modèles de structure par terme des prix permet de se libérer de cette difficulté : ils autorisent en effet la détermination, en univers risque-neutre, des équivalents certains des flux nets de trésorerie associés à un projet. Le montant d'un flux équivalent certain représente la valeur du flux incertain compte tenu du risque qui caractérise ce dernier. Dans ce contexte, l'ajustement au risque n'est donc pas réalisé au niveau du taux d'actualisation, comme c'est le plus souvent le cas lorsque les méthodes traditionnelles de sélection des investissements sont utilisées : il passe par la détermination de flux certains équivalents aux flux prévisionnels incertains. Ces équivalents certains dépendent des prix *forward* de la commodité, ou, lorsque les taux d'intérêt sont considérés comme constants, des prix à terme. Cette étape de détermination des flux équivalents certains étant franchie, les flux nets de trésorerie peuvent alors être actualisés au taux d'intérêt sans risque.

### 2.3. LE CARACTERE OPTIONNEL DES DECISIONS D'INVESTISSEMENT

Le caractère optionnel des décisions d'investissement peut être compris à partir d'une analogie entre la détention de droits d'exploitation d'un gisement et celle d'une option sur action. Le droit d'exploitation sur une mine non développée correspond au droit de produire et de s'approprier la valeur nette présente d'un gisement.

La décision de développer un champ peut être considérée comme l'exercice d'une option d'achat (*call*) de type américain : l'investisseur peut choisir d'exercer un *call* à tout moment précédant son échéance ; de même, l'opérateur peut décider de développer un champ à toute date antérieure à l'expiration de ses droits d'exploitation. L'exercice de l'option, dans les deux cas, est irréversible. Enfin, dans le cas d'un actif financier comme dans celui d'un actif réel, la question cruciale est de déterminer le prix seuil à partir duquel exercer l'option.

Une option sur actif réel présente cependant deux caractéristiques qui la distinguent d'une option sur action : en premier lieu, son échéance peut être très éloignée, si les droits d'exploitation sont loin d'être parvenus à leur terme<sup>13</sup>. Elle peut même être infinie, si l'exploitant est également le détenteur de la ressource. De plus, si l'exercice d'une option d'achat sur action donne immédiatement la possibilité de détenir cette action, le produit de l'extraction minière n'est pas obtenu instantanément lorsque le développement d'un champ a été décidé : entre la date de mise en production d'un gisement pétrolier et l'arrivée du pétrole brut sur les lieux de consommation, il peut s'écouler plusieurs mois, voire années.

### 2.4. LA LOI D'INVESTISSEMENT DANS L'APPROCHE OPTIONNELLE.

Lorsque le critère de la VAN est retenu, l'investissement peut être entrepris dès que la valeur nette présente associée à un projet est supérieure ou égale à zéro. Cependant, lorsqu'une hausse de la valeur nette présente d'un projet est anticipée, il n'est pas optimal d'investir simplement lorsque le seuil de rejet de l'investissement

est franchi : il existe une option associée à la possibilité d'attendre, et cette option a une valeur. La loi d'investissement est modifiée : la décision d'investissement peut être prise dès que la valeur de l'option est supérieure ou égale à la valeur nette présente du projet.

La prise en considération de l'existence d'options d'investissement permet de comprendre pourquoi la VAN n'est pas utilisée comme elle devrait l'être en théorie : étant données l'importance des coûts irréversibles associés à l'ouverture et à la fermeture d'unités de production, ainsi que la forte volatilité des prix des commodités minérales, la valeur nette présente d'un gisement doit être bien supérieure à zéro pour qu'un investissement soit réalisé. Si le critère de la VAN n'est pas respecté à la lettre, c'est parce que ses utilisateurs accordent une valeur à l'option de reporter une décision d'investissement.

## 2.5. CONCLUSION

L'option d'exploiter ou non une ressource naturelle est inhérente à la détention de celle-ci ou de droits d'exploitation sur cette ressource : l'opérateur a la possibilité de mettre en œuvre son projet d'investissement et de payer, dans le cas d'un investissement minier, les coûts de développement et les coûts opérationnels si le prix du produit est suffisamment élevé pour justifier une telle décision.

## *SECTION 3 : COMPARAISON DES APPROCHES TRADITIONNELLE ET OPTIONNELLE*

L'objectif de cette section est de montrer que différentes méthodes d'analyse de projets d'investissement conduisent à des valorisations et donc à des décisions d'investissement différentes. Le cadre d'analyse retenu est tout d'abord présenté : le projet étudié est l'exploitation d'un gisement pétrolier. Parmi les différentes options associées à la détention d'un gisement, seule celle associée à la possibilité de

---

<sup>13</sup> La durée des droits d'exploitation pour une mine est extrêmement variable : elle peut aller jusqu'à 99 ans sur certains champs ou être inférieure à 5 ans dans d'autres cas.

reporter ou non l'exploitation est prise en considération (3.1). Les deux méthodes d'analyse des projets d'investissement retenues pour cette étude sont ensuite exposées (3.2). La première utilise la VAN comme critère de sélection, la seconde repose sur une approche optionnelle. Dans ce cas, la valorisation des flux futurs est réalisée à partir de deux modèles de structure par terme des prix des commodités présentés au chapitre quatre : le modèle BG et le modèle MR. Les résultats obtenus à partir de ces différentes méthodes sont enfin comparés (3.3.).

### 3.1. CADRE D'ANALYSE

L'exploitation de ressources pétrolières nécessite plusieurs phases d'investissements : la première correspond à l'exploration, la seconde au développement des champs, la troisième à l'extraction du pétrole pendant plusieurs années. L'étape de développement nécessitant les dépenses les plus conséquentes, c'est à ce stade que la valeur de l'option est la plus importante. Le projet étudié est donc le développement d'un champ pétrolier. Ce type d'investissement, compte tenu des coûts de fermeture d'un gisement, peut être considéré comme irréversible : l'enjeu associé à la possibilité de retarder l'investissement s'en trouve accru.

Les hypothèses suivantes sont posées : en premier lieu, les réserves ainsi que les coûts d'extraction et de développement sont supposés connus. Le risque d'expropriation est considéré comme nul, et la durée de vie du projet est fixée à dix ans. Enfin, le volume et les coûts de productions sont considérés comme indépendants de la date de développement.

La possibilité de fermer temporairement l'exploitation pétrolière pour la rouvrir ensuite n'est pas prise en considération : pour les mines exploitées en sous-sol et pour les gisements pétroliers, ce type d'opération n'est presque jamais réalisé<sup>14</sup>. Lorsque l'exploitation est interrompue, la mine souterraine et le gisement pétrolier se remplissent d'eau. Le coût de réouverture, pour ce type de ressources, est proche de celui d'un nouveau développement. L'option d'abandonner le gisement est

---

<sup>14</sup> Dans le marché pétrolier, aux Etats-Unis, des techniques de mise en attente des champs ont été développées. Les champs considérés ne représentent cependant qu'une part mineure de la production totale de pétrole brut.

également négligée : dans l'industrie pétrolière, une fois l'exploitation entreprise, celle-ci est menée jusqu'à son terme, du moins tant que les recettes d'exploitation restent supérieures aux coûts évitables.

## 3.2. ETUDE DU PROJET D'INVESTISSEMENT

Deux méthodes d'analyse du projet d'investissement sont comparées. La première repose sur l'analyse traditionnelle, et utilise la VAN comme critère de sélection (3.2.1). La seconde correspond à une approche optionnelle, dans laquelle la valorisation des flux futurs est réalisée à l'aide de deux modèles de structure par terme des prix présentés au chapitre quatre : les modèles BG et MR (3.2.2). Ces méthodes diffèrent à trois égards : la valorisation du prix au comptant futur, le taux d'actualisation retenu pour déterminer la valeur présente d'un baril de pétrole produit ultérieurement, et la loi d'investissement. Pour chacune de ces méthodes, le prix au comptant pour lequel la valeur actuelle nette s'annule est calculé. De plus, pour les approches optionnelles, la valeur de l'option et le prix critique à partir duquel il est optimal d'investir sont déterminés.

### 3.2.1. Détermination de la valeur actuelle nette

La détermination de la valeur actuelle nette du projet est une première étape commune à toutes les études réalisées dans ce chapitre, indépendamment de la méthode retenue : le calcul de la VAN permet de décider de l'adoption ou du rejet du projet lorsque la méthode traditionnelle d'évaluation des investissements est utilisée ; dans l'approche optionnelle de l'investissement, la VAN correspond à la condition à l'échéance de l'option<sup>15</sup>.

Le calcul de la VAN est effectué en supposant que l'investissement conduira à la production d'un baril de pétrole à la fin de chaque année pendant dix ans. La VAN d'un projet est mathématiquement exprimée de la façon suivante :

---

<sup>15</sup> Ce point est détaillé en sous-section 3.2.2.

$$VAN = \sum_{T=1}^{10} VP(a, T) - C_p \sum_{T=1}^{10} B(a, T) - I_0$$

où  $VP(a, T)$  est la valeur présente d'un baril de pétrole produit en  $T$ ,  $a$  est le taux d'actualisation,  $C_p$  représente le coût de production par baril, supposé constant pendant 10 ans,  $B(a, T)$  est la valeur présente de 1\$ (elle est égale à  $e^{-aT}$  lorsque le taux d'actualisation est constant) et  $I_0$  est l'investissement initial requis pour le développement.

La méthode traditionnelle d'évaluation des projets d'investissement est utilisée en conservant les hypothèses communément admises dans l'industrie pétrolière : pour le calcul des flux futurs associés au projet d'investissement, le prix au comptant est supposé constant. Ces flux sont actualisés en utilisant des taux correspondant à ceux utilisés par les professionnels : ils varient entre 10 et 15%.

### 3.2.2. L'approche optionnelle de l'investissement

Dans le cadre de l'approche optionnelle, l'investissement est envisagé de la façon suivante : l'opérateur dispose d'une durée de dix ans pendant laquelle il a la possibilité de développer. Cette décision dépend du niveau de prix observé et anticipé pour la commodité. L'échéance de l'option d'investissement considérée est donc de dix ans. A l'expiration de cette dernière, le gisement ne sera exploité que si la valeur actuelle nette des flux d'exploitation est supérieure ou égale à zéro.

La pertinence de cette approche, dans le cadre du marché pétrolier, peut être justifiée de la façon suivante : longtemps, dans cette industrie, la principale question sous-tendant la décision de développer un champ était d'ordre technique : comment développer un champ au meilleur coût ? Aujourd'hui cependant, il arrive de plus en plus fréquemment que les champs découverts ne soient pas immédiatement développés, dans l'attente d'une hausse des prix. Un opérateur a d'autant plus tendance à reporter son investissement que le niveau de ses réserves est élevé.

Chacune des approches optionnelles étudiées dans ce chapitre repose sur un modèle de structure par terme des prix des commodités : le modèle BG (3.2.2.a),

pour lequel le prix au comptant suit un mouvement brownien géométrique, et le modèle MR (3.2.2.b), selon lequel le prix au comptant et le *convenience yield* suivent un processus de retour vers une valeur moyenne. Ces modèles permettent en premier lieu de valoriser les flux futurs associés au projet en considérant qu'un prix à terme est une représentation, à une date donnée, du prix au comptant futur. Ils conduisent ensuite à la valorisation de l'option associée à la détention du gisement et à la détermination du seuil de prix pour lequel il est optimal d'investir.

### 3.2.2.a. Option réelle associée au modèle BG :

La solution du modèle BG est la suivante :

$$F(S, t, T) = S e^{(r-c)\tau} \quad (\text{BG6})$$

- $r$  est le taux d'intérêt sans risque,
- $c$  est le *convenience yield*, supposé constant.

En utilisant la solution de ce modèle pour valoriser les flux futurs associés au projet d'investissement, la valeur actuelle du projet peut être exprimée ainsi :

$$VAN(S, t, T) = S \sum_{T=1}^{10} e^{-cT} - C_p \sum_{T=1}^{10} e^{-rT} - I_0 = S\beta_1 - \beta_2 \quad (\text{BG12})$$

avec :  $\beta_1 = \sum_{T=1}^{10} e^{-cT}$  et  $\beta_2 = C_p \sum_{T=1}^{10} e^{-rT} - I_0$

$C_p$  est le coût de production unitaire,  $I_0$  est l'investissement initial.

L'option d'investir,  $V(S, t, T)$ , satisfait l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - c) S V_S - rV - V_\tau = 0 \quad (\text{BG13})$$

L'équation fondamentale de valorisation de l'option est différente de celle permettant de valoriser les contrats à terme. Le portefeuille de couverture permettant de répliquer l'actif contingent, lorsque ce dernier est une option d'investir dans un actif réel, est en effet différent de celui utilisé lorsque l'actif contingent est un contrat à terme. La détention de l'option réelle, contrairement à celle du contrat à terme, est coûteuse. Ainsi, lorsque l'unique source d'incertitude affectant la valeur de l'option réelle est le prix au comptant de la commodité, le portefeuille de couverture est

composé d'une position sur l'option, d'une position sur un contrat à terme<sup>16</sup>, et d'une position sur l'actif sans risque.

Le portefeuille de couverture utilisé dans le cas d'une option réelle doit non seulement être non risqué, mais également avoir un rendement égal à celui de l'actif sans risque. Cette dernière condition explique l'apparition du terme «  $rV$  » dans l'équation fondamentale de valorisation de l'option. La méthode de valorisation retenue reposant sur l'hypothèse selon laquelle les actifs composant le portefeuille de couverture sont des actifs échangés, les réserves émises au chapitre quatre à l'égard de ce procédé de valorisation<sup>17</sup> restent valables.

A l'équation fondamentale de valorisation est associée la condition à l'échéance suivante :

$$V(S, T, T) \geq \max[VAN(S, t, T), 0] \quad (\text{BG14})$$

A l'échéance  $T$ , si la valeur actuelle nette de l'investissement est négative ou nulle, la valeur de l'option est nulle. Si en revanche la VAN est positive, la valeur de l'option est égale à cette dernière. On considère de plus que l'investissement peut avoir lieu à toute date comprise entre la date présente  $t$  et la date d'expiration de l'option  $T$ . L'actif valorisé peut donc être identifié à une option d'achat américaine<sup>18</sup>.

En considérant que l'échéance de l'option est infinie, une solution peut être obtenue pour l'équation (BG13)<sup>19</sup> :

$$V(S) = (S^* \beta_1 - \beta_2) \times \left( \frac{S}{S^*} \right)^d \quad (\text{BG15})$$

Avec :

$$\beta_1 = \sum_{T=1}^{10} e^{-cT} \quad \beta_2 = C_p \sum_{T=1}^{10} e^{-rT} - I_0$$

$$S^* = \frac{\beta_2 d}{\beta_1 (d-1)}$$

$$d = \frac{1}{2} - \frac{r-c}{\sigma^2} + \sqrt{\left( \frac{1}{2} - \frac{r-c}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

<sup>16</sup> La position sur le contrat à terme assure une protection contre l'incertitude associée au prix au comptant (chapitre quatre, section un).

<sup>17</sup> Section un du chapitre quatre.

<sup>18</sup> Une option d'achat (*call*) américaine peut être exercée à tout moment.



$S^*$  est le prix de la commodité à partir duquel il est optimal d'investir.

### 3.2.2.b. Option réelle associée au modèle MR

La solution du modèle MR est la suivante :

$$F(S, C, t, T) = S \times \exp[-HC + B[\tau]] \quad (\text{MR5})$$

Avec :  $H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}, \quad \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa},$

$$B[\tau] = \left[ \left( r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_c^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_s \sigma_c \rho}{\kappa} \right) \times \tau \right] + \left[ \frac{1}{4} \sigma_c^2 \times \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \right] + \left[ \left( \hat{\alpha} \kappa + \sigma_s \sigma_c \rho - \frac{\sigma_c^2}{\kappa} \right) \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa^2} \right) \right]$$

Cette solution peut être utilisée pour valoriser les flux futurs associés au projet d'investissement. La valeur actuelle nette de ce projet peut alors être exprimée de la façon suivante :

$$VAN(S, C, t, T) = S(t) \sum_{T=1}^{10} A(T) \times e^{-HC(t)} - C_p \sum_{T=1}^{10} e^{-rT} - I_0 = S\beta_1 - \beta_2 \quad (\text{MR15})$$

Avec :  $A(\tau) = \exp \left[ \frac{(H - \tau) \times [\kappa^2 \hat{\alpha} - 0.5 \sigma_c^2 + \kappa \rho \sigma_s \sigma_c - \frac{\sigma_c^2 H^2}{4\kappa}]}{\kappa^2} \right]$

$$\beta_1 = \sum_{T=1}^{10} A(T) \times e^{-HC(t)}, \quad \beta_2 = C_p \sum_{T=1}^{10} e^{-rT} - I_0$$

Dans le cas du modèle MR, la valeur de l'option d'investir,  $V(S, C, t, T)$  satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 V_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 V_{cc} + \rho \sigma_s \sigma_c S V_{sc} + S V_s (r - C) + V_c [\kappa(\alpha - C) - \lambda] - rV - V_\tau = 0 \quad (\text{MR16})$$

sous la condition :

$$V(S, C, T, T) \geq \max[VAN(S, C, t, T), 0] \quad (\text{MR17})$$

Cette condition à l'échéance est identique à celle présentée dans le cas du modèle BG.

---

<sup>19</sup> Cette hypothèse peut être considérée comme raisonnable lorsque l'échéance de l'option est de 10 ans. Cette solution a été proposée par Schwartz (1997).

Le modèle MR suppose que deux sources d'incertitude affectent la valeur de l'option réelle : le prix au comptant et le *convenience yield*. De ce fait, le portefeuille de couverture utilisé pour valoriser l'option est composé de deux positions sur des contrats à terme<sup>20</sup>, d'une position sur l'actif sans risque, et d'une position sur l'option.

L'équation (MR16) est résolue numériquement à l'aide d'une méthode aux différences finies<sup>21</sup> : dans un premier temps, ses dérivées partielles par rapport aux variables d'état sont remplacées par des approximations obtenues à l'aide de développements de Taylor. Parmi les différentes méthodes aux différences finies, celle de Crank-Nicholson a été retenue pour la stabilité de ses solutions.

Le processus de discrétisation porte à la fois sur les valeurs des variables d'état  $S$  et  $C$  et sur le temps à parcourir avant l'échéance  $T$ . Le temps à parcourir avant l'échéance,  $\tau = (T-t)$  est divisé en  $n$  intervalles de longueur  $k$ . La valeur de l'option est calculée à la date  $(s-k)$  de façon récursive, comme une fonction de sa valeur à l'instant  $s$  avec  $t \leq s \leq T$ . L'instant  $s = T$  correspond à la date d'expiration de l'option. Le domaine de variation des variables d'état  $S$  et  $C$  est divisé en  $m$  intervalles de longueur  $h$ . La grille est constituée des points  $(ih, jh, nk)$  dans l'espace  $(S, C, t)$  tels que :

$$S = ih \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq m$$

$$C = jh \quad \text{pour} \quad -m/2 \leq j \leq m/2^{22}$$

$$t = nk \quad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq nn$$

La valeur de l'option est représentée par un schéma à trois dimensions :  $V(S, C, t) = V(ih, jh, nk) = V^n(i, j) = U^n(i, j)$ . Plus  $m$  et  $nn$  sont élevés, plus les solutions numériques du système discret sont proches de la solution réelle de l'équation.

Le schéma de Crank-Nicholson centré en espace obtenu à l'issue de la discrétisation est exprimé de la façon suivante :

---

<sup>20</sup> Chapitre quatre, section un.

<sup>21</sup> Cette méthode est présentée en annexe neuf. Elle est inspirée de celle présentée par M. Bellalah (1990) et a également été appliquée par Gibson et Schwartz (1990).

$$\left\{T + V\delta_s^2 + W\delta_c^2 + X\delta_s\delta_c + Y\delta_s + Z\delta_c\right\}U^{n-1}(i, j) = \left\{1 - V\delta_s^2 - W\delta_c^2 - X\delta_s\delta_c - Y\delta_s - Z\delta_c\right\}U^n(i, j)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec :} \quad V &= \frac{\sigma_s^2 i^2 k}{4R} & W &= \frac{\sigma_c^2 k}{4h^2 R} & X &= \frac{i\rho\sigma_s\sigma_c k}{8hR} \\ Y &= \frac{ik(r-jh)}{4R} & Z &= \frac{k(\kappa(\hat{\alpha}-jh))}{4hR} & T &= \frac{2-rk}{2R} \\ R &= \frac{2+rk}{2} \end{aligned}$$

$$\text{pour} \quad 1 \leq i \leq m-1 \text{ et} \quad -(m/2)+1 \leq j \leq (m/2)+1$$

A partir ce schéma, une méthode de type *Alternative Direction Implicit* (ADI ou Directions Alternées) est appliquée. Cette méthode s'inspire de celle proposée par Mitchell et Mc Kee en 1970. Elle autorise la résolution de l'équation (MR16) en deux phases malgré la présence d'une dérivée croisée.

Employer une méthode de type ADI consiste à introduire un terme intermédiaire pour séparer, à chaque pas de temps, le système d'équations présenté ci-dessus en deux sous-systèmes d'équations. Chacun de ces deux sous-systèmes permet de déterminer un système tridiagonal correspondant à une dimension de l'espace<sup>23</sup>. Ces deux sous-systèmes sont successivement résolus pour chaque pas de temps (d'où le nom de cette méthode : Directions Alternées).

### 3.3. COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS A PARTIR DE CHAQUE METHODE

Dans l'industrie pétrolière, l'investissement initial  $I_0$  requis pour exploiter un gisement, et le coût de production par baril  $C_P$  varient fortement d'une région à l'autre, en fonction des conditions dans lesquelles l'exploitation est réalisée.

Dans cette étude, le coût de production par baril  $C_P$  a été fixé à 7 USD, chiffre considéré comme réaliste en se référant à ceux estimés pour la production en

<sup>22</sup> L'intervalle de variation du *convenience yield* est différent de celui retenu pour le prix au comptant : le *convenience yield* peut en effet être négatif, ce qui n'est pas le cas du prix au comptant.

<sup>23</sup> Les deux dimensions dans l'espace sont  $i$  et  $j$ . Elles correspondent respectivement aux variables d'état  $S$  et  $C$ .

Mer du Nord. Pour déterminer le montant de l'investissement initial  $I_0$ , nous avons considéré qu'un projet était jugé rentable, dans l'industrie pétrolière, lorsque sa valeur actuelle nette était nulle pour un prix au comptant supposé rester constant à un niveau de 12 USD pendant toute la durée de l'exploitation, et pour un taux d'actualisation de 15%. Le paramètre  $I_0$  a ainsi été fixé à 25 USD. Ces valeurs de  $C_P$  et de  $I_0$  peuvent être discutées. L'intérêt de l'exercice n'est pas de travailler avec des valeurs correspondant à un projet précis, mais de comparer les méthodes.

### 3.3.1. Méthode traditionnelle

Dans le cadre de l'analyse traditionnelle des projets d'investissements, les flux nets anticipés sont actualisés à un taux qui reflète leur risque. Il est donc nécessaire de spécifier le taux d'actualisation et le prix au comptant anticipé pour la période correspondant à la durée de vie du projet : dix ans. Dans l'industrie minière, l'hypothèse couramment formulée est que le prix au comptant restera constant. Le taux d'actualisation est généralement compris entre 10 et 15 %. L'investissement est entrepris dès que la valeur actuelle nette est supérieure ou égale à zéro.

Le tableau 6.1 présente la valeur du projet d'investissement lorsque différentes hypothèses sont retenues pour le niveau du prix au comptant anticipé  $S$  et le taux d'actualisation  $a$ . Il indique également le seuil de rejet du projet, pour chaque hypothèse de taux d'actualisation.

**Tableau 6.1. Valeur actuelle nette en fonction du taux d'actualisation et des hypothèses de prix retenues**

a	Seuil(\$)	VAN(\$)			
		S = 12 \$	S = 14 \$	S = 16 \$	S = 18 \$
10%	11	5,7	18,01	30,3	42,59
12,5%	11,5	2,68	13,75	24,82	35,9
15%	12	0	10,3	20,16	30,21

$C_P = 7 \text{ USD}$  ;  $I_0 = 25 \text{ USD}$ .

La valeur du projet est évidemment très sensible aux hypothèses retenues pour le taux d'actualisation et le prix au comptant. Elle varie également fortement en

fonction des conditions (valeurs de  $C_P$  et de  $I_0$ ) dans lesquelles l'exploitation a lieu, comme le montre le tableau 6.2.

**Tableau 6.2. Valeur actuelle nette pour différentes conditions d'exploitation**

		Prix seuil (\$)	VAN(\$)
$I_0 = 25\$$	$C_P = 5\$/b$	9,5	24,83
	$C_P = 7\$/b$	11,5	13,75
	$C_P = 10\$/b$	14,5	-2,85
$C_P = 7\$/b$	$I_0 = 20$	10,5	18,75
	$I_0 = 30$	12,5	8,75

$S = 14 \text{ USD}$  ;  $a = 12,5\%$

### 3.3.2. Méthodes optionnelles

Lorsque les modèles MR et BG sont utilisés pour valoriser le projet, l'actualisation est réalisée au taux d'intérêt sans risque. La valeur actuelle nette du projet et la valeur de l'option dépendent des hypothèses formulées quant au comportement dynamique du prix au comptant et du *convenience yield*.

#### 3.2.2.a. Modèle BG

Dans le modèle BG, la seule incertitude affectant le prix de l'option réelle est le prix au comptant  $S$ . Le *convenience yield*  $c$  est considéré comme constant. La volatilité du prix au comptant  $\sigma_S$  est fixée en se référant aux volatilités des prix à terme à un mois observées sur les bases de données utilisées au chapitre cinq. Les valeurs retenues pour le *convenience yield* comme pour le taux d'intérêt sans risque sont également fondées sur les tests empiriques réalisés au chapitre précédent.

Lorsque l'option réelle est valorisée à partir du modèle BG, compte tenu des valeurs retenues pour les paramètres, le niveau du prix au comptant à partir duquel il est optimal d'investir est très élevé (tableau 6.3). Ce résultat peut être expliqué en se référant aux simulations du modèle BG réalisées au chapitre quatre : dans ce modèle, la forme de la structure par terme des prix dépend du niveau relatif du taux d'intérêt et du *convenience yield*. Dans tous les cas considérés ci-dessus, le *convenience yield* étant inférieur au taux d'intérêt, la structure par terme des prix est en report. Cela

signifie que le prix au comptant anticipé augmente au fur et à mesure que l'échéance de production d'un baril s'éloigne, atteignant parfois des valeurs peu significatives sur le plan économique.

**Tableau 6.3 Modèle BG, valeur de l'option pour différents niveaux de prix au comptant, de convenience yield et de taux d'intérêt**

		VAN = 0	Option (\$)	Seuil(\$)
S = 18 \$ c = 0,2	r = 3%	21	2,85	27,2
	r = 5%	20	4,24	25,8
	r = 7%	19	5,94	24,6
r = 5% c = 0,2	S = 14 \$	20	1,34	25,8
	S = 22 \$	20	10,63	25,8
r = 5%	c = 0	8	179,8	74,8
S = 18 \$	c = 0,3	29	0,18	34,1

$$\sigma_S = 0,3 ; C_P = 7\$ ; I_0 = 25\$$$

Ainsi, la valeur actuelle nette du projet est nulle pour des prix au comptant le plus souvent supérieurs à ceux obtenus dans le cadre de l'analyse traditionnelle, et le seuil d'investissement est très élevé, de telle sorte que la décision d'investir est toujours reportée.

L'étude de la valeur de l'option pour différentes conditions d'exploitation (tableau 6.4) permet d'illustrer le fait que celle-ci est une fonction décroissante du coût de production unitaire  $C_P$  et du montant de l'investissement initial  $I_0$ .

**Tableau 6.4 Modèle BG, valeur de l'option pour différentes conditions d'exploitation**

		VAN=0	Option (\$)	Seuil (\$)
I <sub>0</sub> = 25\$	C <sub>P</sub> = 5\$/b	16	9,22	20,8
	C <sub>P</sub> = 7\$/b	20	4,24	25,8
	C <sub>P</sub> = 10\$/b	26	1,69	33
C <sub>P</sub> = 7\$/b	I <sub>0</sub> = 20	19	5,36	24,2
	I <sub>0</sub> = 30	21,5	3,4	27,4

$$S = 18 \$ ; c = 0,2 ; \sigma_S = 0,3 ; r = 5\% ;$$

De même, le prix seuil à partir duquel l'investissement peut être réalisé est une fonction croissante de ces deux paramètres.

### 3.3.2.b. Modèle MR

Dans le modèle MR, deux sources d'incertitude affectent le prix de l'option réelle : le prix au comptant et le *convenience yield*. Ces deux variables d'état suivent un processus de retour vers une valeur moyenne. Les paramètres du modèle MR sont fixés en se référant aux valeurs obtenues au chapitre cinq, à partir du filtre de Kalman simple.

Les résultats obtenus à partir du modèle MR diffèrent fortement de ceux présentés pour le modèle BG. Comme les tableaux 6.3 et 6.5 permettent de le remarquer, dans des conditions identiques de prix au comptant ( $S = 18$  USD), de *convenience yield* ( $C = 0,2$ ) et de taux d'intérêt ( $r = 5\%$ ), la valeur de l'option d'investir associée au modèle MR est supérieure à celle associée au modèle BG, la valeur actuelle nette s'annule pour une valeur plus faible du prix au comptant, et le seuil d'investissement est inférieur. Dans le modèle MR, compte tenu des valeurs retenues pour les paramètres et les variables d'état, la structure par terme des prix, pour une échéance éloignée, est légèrement en déport. Dans le cas du modèle BG, elle était en report.

**Tableau 6.5** *Modèle MR, valeur de l'option pour différents niveaux de prix au comptant, de convenience yield, et de taux d'intérêt*

		VAN = 0	Option (\$)	Seuil(\$)
S = 18 \$ C = 0,2	r = 3%	13,3	29,73	14,6
	r = 5%	12,4	35,58	14,2
	r = 7%	11,6	40,7	14,4
r = 5% C = 0,2	S = 14	12,4	10,52	14,2
	S = 22	12,4	60,74	14,2
r = 5% S = 18 \$	C = 0	11,2	47,27	13
	C = 0,3	13	30,14	14,9

$\kappa = 2$  ;  $\alpha = 0,1$  ;  $\sigma_S = 0,3$  ;  $\sigma_C = 0,4$  ;  $\rho = 0,9$  ;  $\lambda = 0,1$  ;  $C_P = 7\$$  ;  $I_0 = 25\$$

Le tableau 6.5. permet également de remarquer que la valeur de l'option est une fonction décroissante du niveau du *convenience yield*. Un *convenience yield* faible signifie en effet que des prix au comptant élevés peuvent être anticipés. De ce fait, la valeur de l'option d'investissement augmente.

Dans le modèle MR, le *convenience yield* et le prix au comptant suivent un processus de retour vers une valeur moyenne. Plus la force de rappel est importante, plus l'incertitude associée aux revenus à long terme diminue, et plus la valeur de l'option est faible, comme l'indique le tableau 6.6.

**Tableau 6.6. Modèle MR, valeur de l'option pour différentes valeurs de  $\kappa$** 

	VAN=0	Option (\$)	Seuil (\$)
$\kappa = 1$	10,3	69,9	21,4
$\kappa = 1,5$	11,8	41,34	14,8
$\kappa = 2$	12,4	35,58	14,2

$S = 18 \$$  ;  $C = 0,2$  ;  $r = 5\%$  ;  $\alpha = 0,1$  ;  $\sigma_S = 0,3$  ;  $\sigma_C = 0,4$  ;  $\rho = 0,9$  ;  $\lambda = 0,1$  ;  $C_P = 7\$$  ;  $I_0 = 25\$$

Ainsi, lorsque la force de rappel associée au *convenience yield* diminue, les résultats obtenus à partir du modèle MR se rapprochent de ceux du modèle BG.

Enfin, comme dans le cas du modèle BG, la valeur de l'option est une fonction décroissante du coût de production  $C_P$  et du montant initial de l'investissement  $I_0$  (tableau 6.7).

**Tableau 6.7. Modèle MR, valeur de l'option et prix critique pour différentes conditions d'exploitation**

		VAN=0	Option (\$)	Seuil (\$)
$I_0 = 25\$$	$C_P = 5\$/b$	10	50,94	11,5
	$C_P = 7\$/b$	12,4	35,58	14,2
	$C_P = 10\$/b$	16	13,04	18,4
$C_P = 7\$/b$	$I_0 = 20$	11,6	40,58	13,3
	$I_0 = 30$	13,2	30,59	15,1

$S = 18 \$$  ;  $C = 0,2$  ;  $r = 5\%$  ;  $\alpha = 0,1$  ;  $\kappa = 2$  ;  $\sigma_S = 0,3$  ;  $\sigma_C = 0,4$  ;  $\rho = 0,9$  ;  $\lambda = 0,1$  ;

Lorsque les conditions d'exploitation sont peu favorables ( $C_P = 10$  USD) l'investissement doit être reporté.

## SECTION 4 : CONCLUSION

Cette étude permet d'illustrer dans quelle mesure la valeur d'un projet et la décision d'investissement dépendent de la méthode retenue pour analyser un projet d'investissement. Lorsqu'une approche optionnelle est utilisée, le niveau de prix au comptant à partir duquel l'investissement peut être entrepris est supérieur à celui obtenu à partir de la méthode traditionnelle. L'incitation à investir immédiatement est moins prononcée.

Pour les deux approches optionnelles étudiées, les résultats obtenus diffèrent fortement. Les hypothèses sous-jacentes au comportement dynamique des variables d'état des modèles de structure par terme des prix ont une influence considérable sur



la valeur du projet et la décision d'investissement : lorsque les variables d'état sont supposées avoir un comportement de retour vers une valeur moyenne, comme c'est le cas dans le modèle MR, le niveau de prix à partir duquel l'investissement peut être entrepris est inférieur à celui obtenu à partir du modèle BG. Les opérateurs sont incités à investir plus rapidement.

Les différences constatées entre les résultats obtenus à partir des deux modèles de structure par terme des prix employés peuvent également être expliquées par les hypothèses relatives à la volatilité des rendements des prix à terme pour chacun de ces modèles. Dans le modèle BG, la volatilité des rendements des prix à terme est identique quelle que soit l'échéance considérée : elle correspond à celle du prix au comptant. Dans le modèle MR en revanche, la volatilité des rendements des prix à terme décroît au fur et à mesure que l'échéance considérée s'éloigne. L'incertitude associée aux flux nets de trésorerie du projet est donc plus élevée dans le cas du modèle BG. L'augmentation de l'incertitude a un impact positif sur la valeur de l'option réelle, et diminue l'incitation à l'investissement immédiat.

Parce que le modèle MR permet d'obtenir une représentation vraisemblable de la structure par terme des prix pour une échéance éloignée, ce qui n'est pas le cas du modèle BG<sup>24</sup>, l'analyse menée à l'aide du modèle MR peut être considérée comme la plus fiable. Lorsque la tendance du prix au comptant à revenir vers une valeur moyenne est ignorée, la méthode optionnelle conduit à des investissements trop tardifs.

L'importance des hypothèses relatives à la dynamique des variables d'état est telle qu'il est particulièrement crucial de disposer de modèles de structure par terme des prix les plus fiables possibles. Si, à l'issue des prolongements envisagés pour les travaux présentés dans le chapitre cinq, la supériorité du modèle AS est complètement établie, ce dernier pourrait être utilisé dans de cadre de stratégies d'investissement.

---

<sup>24</sup> Voir le chapitre quatre.

## CONCLUSION

Les études réalisées dans le but de tester l'hypothèse d'asymétrie du *convenience yield* permettent de penser que cette dernière est validée. Le modèle AS, malgré deux approximations agissant en sa défaveur, se révèle être plus performant que le modèle MR dans sa représentation du comportement des prix à terme pour les maturités les plus proches.

L'estimation du modèle AS est cependant particulièrement délicate : la simulation des prix à terme nécessite un temps de calcul conséquent, et la procédure d'optimisation des paramètres est instable. De ce fait, les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse doivent être poursuivis : en particulier, l'emploi d'une méthode d'inversion pour estimer les paramètres du modèle est envisagé. De plus, le modèle pourrait être modifié afin de réduire la non linéarité de la fonction associant les prix à terme aux variables d'état.

Compte tenu du caractère encore provisoire des résultats obtenus à partir du modèle AS, seuls les modèles BG et MR ont été retenus pour la seconde partie des études empiriques, centrée sur l'analyse de projets d'investissement.

L'utilisation des modèles de structure par terme des prix des commodités permet de prendre en considération l'option associée à la détention d'une ressource naturelle. Elle autorise ainsi une nouvelle approche de la décision d'investissement, intégrant la possibilité de retarder l'exploitation d'un gisement pétrolier. Dans ce contexte, les modèles stochastiques sont utilisés pour valoriser les flux nets de trésorerie associés à un projet et déterminer dans quelles circonstances l'investissement doit être entrepris. La fiabilité du signal d'investissement donné dépend naturellement de la capacité du modèle considéré à évaluer correctement les flux nets de trésorerie futurs.

Les travaux réalisés au chapitre six montrent l'importance que revêt, dans ce type d'analyse, la prise en considération d'un comportement de retour vers une valeur moyenne pour le prix au comptant et le *convenience yield*. La comparaison entre les résultats obtenus lorsque le projet est étudié en utilisant la valeur actuelle nette et lorsque le modèle MR est employé laisse penser que les méthodes d'analyse traditionnelles donnent un signal d'investissement prématuré.

Les méthodes optionnelles semblent particulièrement intéressantes dans un contexte où les investissements considérés sont irréversibles et où il arrive, de plus en plus fréquemment, que la décision d'investissement soit reportée. Elles prennent en effet explicitement en considération l'existence d'un environnement changeant et intègrent la capacité de l'opérateur à réagir en fonction des évolutions constatées.

Les études réalisées au chapitre six pourraient être approfondies en levant, par exemple, les hypothèses selon lesquelles le taux d'intérêt est constant, et le coût d'exploitation comme le niveau des réserves sont connus.

## CONCLUSION GENERALE

Cette thèse a été réalisée en vue de répondre à une question pratique, posée par un opérateur du marché pétrolier : quelle peut être l'utilité des marchés à terme ? Les informations apportées par ces marchés et les techniques de couverture qu'ils proposent peuvent-elles servir à valoriser un gisement et à décider de sa date d'exploitation ?

Les travaux effectués ont donc été centrés sur la valorisation d'un baril de pétrole pour une échéance lointaine de livraison. Pour y parvenir, un modèle de structure par terme des prix des commodités a été employé.

Pour aboutir à la valorisation d'un gisement, plusieurs étapes ont successivement été abordées : en première partie de la thèse, les théories traditionnelles des prix des commodités ont été explorées, afin de comprendre les relations entre prix au comptant et prix à terme. Les modèles de structure par terme des prix des commodités développés à ce jour ont ensuite été étudiés en seconde partie, au chapitre trois. A ce stade des travaux, le constat suivant a été établi : si les théories traditionnelles des prix des commodités constituent effectivement le fondement théorique de l'élaboration d'un modèle de structure par terme des prix, tous les enseignements de ces théories n'ont cependant pas été exploités. En particulier, le comportement asymétrique de la base, particulièrement prononcé dans un marché de commodité, a des implications sur le comportement dynamique du *convenience yield* ignorées à ce jour.

Partant de ce constat, un modèle de structure par terme des prix des commodités, dans lequel le *convenience yield* a un comportement asymétrique, a été développé. Ce modèle a été comparé aux deux modèles les plus fréquemment employés dans le domaine des commodités, afin de s'assurer de la représentativité

des structures par terme des prix qu'il permet d'obtenir. Enfin, les performances de ce modèle, appliqué au marché du pétrole brut, ont été testées. A cette occasion, la nécessité d'améliorer la méthode d'estimation des paramètres du modèle a été mise en évidence.

L'étude des projets d'investissement réalisée en troisième partie de la thèse, a été effectuée uniquement à partir des deux modèles de référence dans le domaine des commodités. L'apport des modèles de structure par terme des prix dans ce type d'analyse a été mis en évidence à partir d'une comparaison avec les méthodes traditionnellement employées dans le marché pétrolier pour valoriser un gisement et décider de sa date de mise en exploitation.

Les principaux résultats de cette recherche sont les suivants. Le premier chapitre est consacré à la théorie du déport normal. Cette théorie suscite encore des recherches actives, car elle offre une interprétation intéressante des relations entre prix au comptant et prix à terme, d'ailleurs utilisée dans le cadre des modèles de structure par terme des prix des commodités. De plus, le marché pétrolier présente une situation de déport permanent qui soulève de nombreuses interrogations. L'analyse de l'évolution de cette théorie explique les raisons pour lesquelles cette dernière n'a pu, à ce jour, être totalement validée ou rejetée.

La théorie du stockage, exposée au chapitre deux, permet l'introduction, dans l'analyse de la relation entre prix au comptant et prix à terme, d'un concept qui se révèle être central pour la compréhension de cette relation : le *convenience yield*. A partir de celles recensées dans la littérature, une définition précise de ce concept est proposée. Dans ce cadre théorique, l'interprétation du mécanisme de formation des prix à terme est fondée sur l'étude des comportements d'arbitrage des opérateurs entre marché physique et marché papier. Ces opérations d'arbitrage ne peuvent être réalisées à l'identique en situation de déport et en situation de report : en effet, un report traduit la présence de stocks abondants sur le marché physique. Lorsque le prix à terme est supérieur au prix au comptant d'un montant excédant les coûts de stockage, il est alors possible d'acheter des marchandises pour simultanément les revendre à terme et réaliser un profit sans risque. L'opération inverse consistant, en situation de déport, à vendre les marchandises tout en achetant à terme un volume

correspondant, ne peut être envisagée aussi facilement, car le déport correspond à une pénurie constatée ou anticipée de la commodité. Ainsi, la base a un comportement asymétrique : en situation de report, sous l'effet des opérations d'arbitrage, elle est stable. Ce n'est pas le cas en situation de déport.

En seconde partie de la thèse, l'étude des principaux modèles de structure par terme des prix des commodités, menée au chapitre trois, a permis de mettre en évidence que les éléments explicatifs de la relation entre prix au comptant et prix à terme présentés en première partie sont tous repris en tant que variables d'état dans les modèles de structure par terme des prix des commodités. Les théories traditionnelles constituent ainsi le support théorique sur lequel s'appuient les méthodes de valorisation relative appliquées au marché pétrolier. De plus, cette revue de la littérature a permis de montrer que les travaux réalisés à partir de modèles de structure par terme des prix des commodités apportaient des éléments de compréhension nouveaux de la relation entre prix au comptant et prix à terme. Ainsi, le *convenience yield*, corrélé au prix au comptant comme le prévoit la théorie du stockage, ne l'est cependant pas parfaitement. Il représente donc une source d'incertitude, distincte du prix au comptant, affectant le comportement des prix à terme. De ce fait, il est légitime de l'introduire en tant que variable d'état dans un modèle de structure par terme des prix. De plus, en prenant en considération le comportement de stockage des opérateurs du marché physique face aux fluctuations du prix au comptant, un comportement de retour vers une valeur moyenne doit lui être associé.

Le chapitre quatre a permis de constater, en reprenant successivement les différentes étapes conduisant à la valorisation d'un contrat à terme de commodité, que les modèles de structure par terme développés à ce jour reposent sur une hypothèse de marchés complets qui n'est en réalité pas vérifiée. Les méthodes de valorisation employées dans le cadre des marchés de commodités, si elles permettent d'aboutir à des applications intéressantes pour les opérateurs du marché pétrolier, ne sont cependant donc pas exemptes d'inconvénients. Dans ce même chapitre, les simulations réalisées à partir de trois modèles de structure par terme des commodités ont par ailleurs permis de montrer que le modèle développé en 1985 par Brennan et

Schwartz ne présente pas des caractéristiques satisfaisantes au regard des applications envisagées : à long terme, les prix à terme théoriques du modèle divergent vers des valeurs n'ayant pas de sens sur le plan économique. Le modèle proposé par Schwartz en 1997, reposant sur l'hypothèse selon laquelle prix au comptant et *convenience yield* suivent tous deux un processus de retour vers une valeur moyenne, ne présente pas de tels inconvénients. Le modèle asymétrique, qui est une version généralisée du précédent, présente de ce fait de grandes similarités de comportement avec le précédent.

Au chapitre cinq, pour tester les performances du modèle de Schwartz et du modèle asymétrique sur le marché pétrolier, la méthode économétrique utilisée par Schwartz en 1997, le filtre de Kalman, a été employée. Celle-ci permet de reconstituer des séries temporelles pour les variables d'état de ces modèles, dont la particularité est de ne pas être observables. Associé à une procédure de maximisation de la fonction de vraisemblance des observations, le filtre de Kalman permet également d'estimer les paramètres des modèles. La méthode employée par Schwartz a dû être adaptée au modèle asymétrique, compte tenu du caractère non linéaire du comportement dynamique des variables d'état de ce dernier. Pour cela, un filtre de Kalman étendu, adapté au modèle a été conçu et utilisé. Le programme informatique associé à ce dernier a été élaboré en vue de minimiser le temps de calcul.

La comparaison entre le modèle de Schwartz et le modèle asymétrique, menée dans l'objectif de valider l'hypothèse d'asymétrie du *convenience yield*, a été réalisée en plusieurs étapes. En premier lieu, les résultats obtenus à partir du modèle de Schwartz, en employant un filtre de Kalman simple puis un filtre de Kalman étendu, ont été présentés et discutés. Cette première étude a permis de constater que les paramètres optimaux obtenus à l'aide de ces deux méthodes sont différents. La linéarisation de la fonction associant les prix à terme aux variables d'état, effectuée dans le filtre de Kalman étendu mais pas dans le filtre de Kalman simple, n'est pas sans impact sur les résultats. De plus, pour les deux méthodes, les paramètres estimés varient en fonction des périodes d'étude considérées, comme l'avait montré Schwartz.

Le filtre de Kalman étendu, lorsque ses performances sont étudiées sur la base de données ayant permis d'estimer les paramètres, se révèle être moins performant que le filtre de Kalman simple. En revanche, lorsque des tests sont réalisés en extrapolation sur des périodes de trois puis de six mois, le filtre de Kalman étendu domine le filtre de Kalman simple. L'interprétation avancée pour expliquer ce phénomène est la suivante : sur la base utilisée pour estimer les paramètres, il est permis de penser que le filtre de Kalman simple effectue, par rapport au filtre de Kalman étendu, un « sur apprentissage » de telle sorte que, même si l'ajustement réalisé au moyen du filtre de Kalman étendu apparaît dans un premier temps comme moins satisfaisant, celui-ci semble plus robuste lorsque les tests sont réalisés en extrapolation. La linéarisation de la fonction associant les prix à terme aux variables d'état, réalisée dans le cas du filtre de Kalman étendu mais pas dans celui du filtre de Kalman simple, jouerait alors le rôle d'un stabilisateur en extrapolation.

Pour comparer le modèle de Schwartz et le modèle asymétrique, une seconde étude a ensuite été réalisée, afin de mesurer l'impact sur les performances d'un modèle de l'approximation que constitue le calcul des prix à terme au moyen de simulations. Le modèle asymétrique n'ayant qu'une solution semi-analytique, les prix à terme théoriques qui lui sont associés ont en effet dû être calculés numériquement. En revanche, les prix à terme théoriques associés au modèle de Schwartz peuvent être calculés analytiquement. L'étude a été effectuée en comparant les performances du modèle de Schwartz lorsque les prix à terme sont déterminés analytiquement et lorsqu'ils sont simulés. Dans les deux cas, un filtre de Kalman étendu a été utilisé. Cette étude a permis de mettre en évidence le temps de calcul considérable nécessaire à l'optimisation des paramètres. De plus, elle a montré que les performances du modèle diminuent avec le nombre de simulations par prix à terme. En comparant les résultats obtenus pour des simulations plus ou moins nombreuses, le choix d'un nombre de simulation relativement réduit, mais permettant toutefois d'aboutir à des résultats cohérents, a été effectué.

Lorsque le modèle de Schwartz était utilisé, les tests réalisés en présence de simulations pour les prix à terme ont mis en évidence l'instabilité de la procédure d'estimation des paramètres. Craignant que cette procédure d'optimisation ne soit encore plus délicate à manipuler dans le cas du modèle asymétrique, une série



d'études préalables a été réalisée avant d'aborder l'optimisation elle-même. L'analyse de la fonction de distribution du *convenience yield* du modèle asymétrique a montré que celle-ci devenait très rapidement asymétrique pour des valeurs relativement faibles du paramètre représentant le degré d'asymétrie du modèle. Ce dernier a donc été fixé à un niveau peu élevé. De plus, compte tenu de la forte instabilité de la procédure d'optimisation appliquée au modèle asymétrique, il est apparu nécessaire de l'amorcer à partir d'un point situé à proximité du minimum global de la fonction de vraisemblance associée aux observations. Ainsi, l'optimisation n'a porté que sur les paramètres associés au prix au comptant, les paramètres associés au *convenience yield* étant fixés de telle sorte que sur la période d'étude, l'espérance du *convenience yield* du modèle asymétrique soit identique à celle du *convenience yield* du modèle de Schwartz. Compte tenu de la faible valeur retenue pour le paramètre représentant le degré d'asymétrie du modèle, cette hypothèse a été considérée comme satisfaisante. En utilisant cette méthode, bien que deux approximations agissant en la défaveur du modèle asymétrique soient effectuées, ce dernier s'est révélé être plus performant que le modèle de Schwartz, sur les maturités les plus proches.

Ces résultats ne constituent naturellement qu'une étape dans l'étude des performances du modèle asymétrique. Ainsi, les travaux portant sur l'étude de projets d'investissement dans le marché pétrolier ont été réalisés en ne retenant que deux des modèles de structure par terme des prix présentés au chapitre quatre. Un projet d'exploitation de gisement pétrolier a été étudié en comparant deux méthodes : d'une part, celle utilisant le critère de la valeur actuelle nette pour décider de l'adoption ou du rejet d'un projet, la plus fréquemment utilisée dans l'industrie pétrolière. D'autre part, une méthode optionnelle, employant les modèles de structure par terme des prix pour valoriser les flux nets de trésorerie futurs et prenant en considération la possibilité accordée à un opérateur de reporter son investissement tant que ses droits d'exploitation ne sont pas parvenus à leur terme. La possibilité d'abandonner temporairement l'exploitation du gisement pétrolier n'a pas été, à ce stade, prise en considération. Les coûts de réouverture des exploitations sont en effet tels que ce type de décision est très rarement prise dans l'industrie pétrolière.

La comparaison a été menée en supposant que les réserves et les coûts d'exploitation du gisement étaient connus, afin de centrer l'analyse sur la méthode de valorisation du projet et le critère de décision d'investissement. Pour valoriser l'option d'investissement associée au modèle de Schwartz, une méthode de résolution numérique aux directions alternées a été employée. Celle-ci permet la résolution d'une équation aux dérivées partielles en deux phases malgré la présence d'une dérivée croisée.

Cette étude a permis de constater que les méthodes couramment employées dans l'industrie pétrolière, parce qu'elles ne prennent pas en considération la possibilité de reporter l'exploitation à une date ultérieure, peuvent conduire à des décisions d'investissement prématurées. Par ailleurs, la comparaison des résultats obtenus à partir des méthodes optionnelles a conduit à souligner l'importance que revêt, dans ce type d'analyse, la prise en considération du comportement de retour vers une valeur moyenne pour le prix au comptant et pour le *convenience yield*.

Au terme de ce travail, un certain nombre d'approfondissements peut être envisagé. Tout d'abord, la supériorité du modèle asymétrique doit être confirmée en utilisant une procédure d'optimisation appropriée, et en modifiant éventuellement le modèle afin de réduire son caractère non linéaire. En effet, les difficultés rencontrées lors de l'estimation des paramètres laissent penser que le filtre de Kalman n'est vraisemblablement pas la méthode la mieux adaptée au problème étudié, pour les raisons suivantes. En premier lieu, il est possible que la linéarisation effectuée dans le cadre du filtre de Kalman étendu constitue une approximation trop importante compte tenu du caractère fortement non linéaire de la fonction associant les prix à terme aux variables d'état dans le modèle asymétrique. Plus généralement, le filtre de Kalman n'est pas la seule voie envisageable pour résoudre le problème inverse que constitue la présence de variables non observables dans les modèles de structure par terme des prix des commodités. En effet, le filtre de Kalman n'est pas une méthode d'inversion en tant que telle : c'est en lui associant la procédure d'optimisation de la fonction de vraisemblance qu'il est possible d'estimer les paramètres du modèle et de reconstituer, *in fine*, les variables d'état correspondant à ces derniers. La fonction de vraisemblance étant une fonction non linéaire des paramètres, dans le modèle

asymétrique comme dans le modèle de Schwartz, utiliser cette dernière dans la procédure d'optimisation introduit une difficulté supplémentaire.

L'emploi de méthodes d'inversion plus classiques semble donc une voie à explorer. Au lieu d'estimer les paramètres du modèle à partir de la fonction de vraisemblance, ceux-ci pourraient être obtenus en minimisant la somme des carrés des erreurs de prix, et en ajoutant à cette dernière un terme de pénalité assurant la stabilité de la procédure d'optimisation.

De plus, en supposant que, comme les études réalisées dans le cadre du modèle asymétrique ont permis de le montrer, le paramètre représentant le degré d'asymétrie du modèle est très inférieur à 1, il est possible de linéariser partiellement la fonction reliant les prix à terme aux variables d'état du modèle asymétrique. Ce procédé devrait faciliter des travaux d'estimation ultérieurs. Une seconde linéarisation permettant d'aboutir à une solution analytique pour le modèle asymétrique est également envisagée. Elle repose cependant sur des hypothèses qui doivent au préalable être testées.

Enfin, le modèle asymétrique, comme celui de Schwartz, ne prend pas en considération la possibilité que les prix des commodités aient un comportement fortement erratique. Une extension de ces travaux, consistant par exemple à introduire des processus de saut dans la dynamique des prix au comptant, pourrait être envisagée. Les données de prix correspondant à la période de la guerre du Golfe offriraient dans ce cas la possibilité de tester ces travaux.

Un approfondissement des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse est également envisageable dans le domaine des stratégies de couverture. La valorisation d'un baril de pétrole brut dont l'échéance de livraison est différée est effectivement réalisée à partir d'un raisonnement d'arbitrage, en construisant un portefeuille de couverture non risqué, de telle sorte que le comportement de ce portefeuille duplique celui de l'actif valorisé. La composition de ce portefeuille a été étudiée, dans le cadre de cette thèse, de façon qualitative. Une étude quantitative constituerait un prolongement naturel de ces travaux.

Cette question a déjà été abordée, dans le domaine des commodités, à l'occasion de l'affaire Metallgesellschaft. Au début des années 90, cette firme a en

effet tenté de couvrir des positions à long terme sur le marché physique à partir de positions à court terme sur le marché papier. Cette tentative, qui s'est soldée par un échec retentissant (2,4 milliards de dollars de pertes ont conduit à une restructuration de la firme) a suscité de nombreux débats. Elle a été à l'origine d'études ayant pour objectif de montrer dans quelle mesure ce type d'opération est réalisable. En particulier, Brennan et Crew, en 1995, ont comparé la stratégie mise en place par Metallgesellschaft aux stratégies associées à des modèles de structure par terme des prix. Ils ont conclu, au terme de cette étude, que ce type d'opérations était envisageable à condition de disposer d'un modèle de représentation de la structure par terme des prix qui soit fiable.

Les travaux de ces deux auteurs pourraient être poussés plus avant : en effet, les stratégies de couverture envisagées par ces derniers sont telles que les positions sur des instruments à court terme du marché dérivé sont systématiquement renouvelées au bout d'un mois, quelle que soit l'évolution des prix constatée. Il serait intéressant de chercher à déterminer les circonstances optimales dans lesquelles les positions de couverture devraient être réinitialisées compte tenu de l'évolution des prix.

Ce type d'étude, là encore, a une portée pratique non négligeable. Le succès rencontré par la firme Metallgesellschaft, lorsqu'elle a proposé à des détaillants des contrats d'approvisionnement sur le marché physique pour des durées de cinq ou de dix ans, en témoigne. L'étude des difficultés rencontrées par Metallgesellschaft, et les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse incitent cependant à la prudence : en premier lieu, les opérations réalisées sur les marchés dérivés de produits pétroliers ne doivent pas dépasser un volume tel qu'elles puissent influencer en elles-mêmes le comportement des prix, comme ce fut vraisemblablement le cas pour Metallgesellschaft. De plus, les portefeuilles de couverture élaborés à partir des modèles de structure par terme des prix ne sont pas parfaits, puisqu'ils supposent que l'on se trouve en situation de marchés complets, ce qui n'est pourtant pas le cas.

La troisième voie à explorer est celle de l'étude des projets d'investissement. Si les travaux réalisés à partir du modèle asymétrique sont probants, celui-ci pourrait être employé à la valorisation de gisements pétroliers. En particulier, il serait dans ce cas intéressant d'introduire, comme l'a fait Schwartz en 1997 pour son propre

modèle, un taux d'intérêt stochastique dans le modèle asymétrique. Cette modification, d'après les travaux de Schwartz, se révèle pertinente dans le cadre d'opérations à long terme. Pour tester l'efficacité du modèle, il serait cependant nécessaire de disposer de données de prix à long terme. Certaines firmes pétrolières disposent de telles données ; cette information n'est cependant pas publique.

De plus, les hypothèses adoptées dans le cadre de cette thèse, selon lesquelles le niveau des réserves et le coût d'exploitation sont supposés connus, pourraient être levées. Des méthodes de simulations Monte Carlo pourraient être employées pour prendre en considération ces deux nouvelles sources d'incertitude.

A plus long terme, les travaux réalisés dans le cadre du marché du pétrole brut pourraient élargis à d'autres marchés. Le marché des produits pétroliers, caractérisé par une forte saisonnalité des prix, est la première extension envisageable. Les modèles de structure par terme des prix employés devront alors être modifiés pour prendre en considération, comme l'a fait Gabillon en 1992, cette saisonnalité.

D'autres marchés de produits énergétiques, tels que le marché de l'électricité, en pleine expansion, offrent également de nouvelles perspectives pour l'étude du comportement des prix dans un marché de commodités. La question posée dans ce cas est celle de la validité de la notion de *convenience yield* pour une commodité non stockable.

Concluons cette thèse en répondant succinctement à la question initialement posée : les marchés à terme ont permis de développer des techniques dont l'intérêt pour un producteur de pétrole est incontestable. Ces dernières lui permettent de valoriser un baril de pétrole brut dont l'échéance de livraison est différée et d'aborder l'analyse des projets d'investissement sous un angle nouveau. Ces techniques reposent cependant sur des hypothèses qui en font, dans un marché tel que celui du pétrole brut, un outil permettant d'accompagner la stratégie des opérateurs, mais certainement pas de la déterminer. Compte tenu de la répartition des réserves dans le monde, la possibilité pour que des chocs de l'offre surviennent ne peut en effet être négligée.

## *BIBLIOGRAPHIE*

- [1].ABKEN P.A., 1990 : « Innovations in Modeling the Term Structure of Interest Rates », *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Atlanta, July-August.
- [2].AMIN K, NG V., PIRRONG S.C., 1995 : « Valuing Energy Derivatives », in « *Managing Energy Price risk* », Risk Publication, Enron.
- [3].ANDERSON B.D.O., MOORE J.B.,1979 : « *Optimal filtering* », Englewood Cliffs, Prentice Hall.
- [4].BABBS S.H., NOWMAN K.B.,1999 : « Kalman Filtering of Generalized Vasicek Term Structure Models », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 34, n°1, March.
- [5].BABUSIAUX D., (1990) : « *Décision d'investissement et calcul économique dans l'entreprise* », Technip, Economica.
- [6].BAKER M.P., SCOTT MAYFIELD E., PARSONS J.E., 1998 : « Alternative Models of Uncertain Commodity Prices for Use with Modern Asset Pricing Methods », *The Energy Journal*, vol. 19, n°1.
- [7].BANCEL F., RICHARD A., 1995 : « *Les Choix d'Investissement* », Collection Gestion, Economica.
- [8].BANCEL F., RICHARD A., 1997 : « Flexibilité des investissements », *Encyclopédie de Gestion*, Y. Simon, P. Joffre (Editeurs), Economica, pp 1421-1432.
- [9].BARNAUD F.H., 1990 : « In search of liquidity : hedging and speculation in oil futures markets », OIES Paper on the World Petroleum Market.
- [10].BARRERA REY F., 1996 : « On the Use of Oil Stocks Data for Empirical Research », *The Journal of Energy Literature*, vol. II, n°2.
- [11].BAXTER J., CONINE JR T.E., TAMARKIN M., 1985 : « On commodity market risk premiums : additional evidence », *The Journal of Futures Markets*, vol. 5, pp 121-125.
- [12].BEAGLEHOLE D.R., TENNEY M.S., 1991 : « General solutions of some interest rate contingent claim pricing equations », *The journal of Fixed Income*, pp 69-83.

- [13].BELLALAH M., 1990 : « *Quatre essais sur l'évaluation des options sur indice et des options sur contrat à terme d'indice* », Thèse, Université Paris IX.
- [14].BELLALAH M., SIMON Y., 1997 : « Prix au comptant. Prix à terme », *Encyclopédie des marchés financiers*, Y. Simon (Editeur), Economica.
- [15].BESSEMBINDER H., 1993 : « An Empirical Analysis of Risk Premia in Futures Markets », *The Journal of Futures markets*, vol. 13, n°6, pp 611-630.
- [16].BHAPPU R.R., GUZMAN J., 1995 : « Mineral investment decision making : a study of mining company practices », *Engineering and Mining Journal*, July, pp 36-38.
- [17].BISIÈRE C., 1997 : « *La structure par terme des taux d'intérêt* », Collection Finance, PUF.
- [18].BLACK F., 1976 : « The pricing of commodity contracts », *Journal of Financial Economics*, n°3, pp 167-179.
- [19].BLACK F., SCHOLES M., 1973 : « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of Political Economy*, vol. 81.
- [20].BLAU G., 1944 : « Some aspects of the theory of futures trading », *Review of Economic Studies*, vol. 12.
- [21].BODIE Z., ROSANSKY V.I., 1980 : « Risk and return in commodity futures », *Financial Analyst Journal*, pp 27-39, May-June.
- [22].BRENNAN M.J., 1958 : « The supply of storage » *American Economic Review*, vol. 47, n°1.
- [23].BRENNAN M.J., 1991 : « The Price of Convenience and the Valuation of Commodity Contingent Claims », in « *Stochastic Models and Options Values* », D. Land, B. Øksendal (Editors), Elsevier Science Publishers.
- [24].BRENNAN M.J., CREW N., 1995 : « Hedging long maturity commodity commitments with short-dated futures contracts », Working Paper, The Anderson School, University of California, Los Angeles, July.
- [25].BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S., 1979 : « A continuous time approach to the pricing of options », *Journal of Banking and Finance*, vol. 3, pp 133-195.



- [26]. BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S., 1982 : « An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 17, n°3, pp 301-329.
- [27].BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S., 1985 : « Evaluating Natural Ressource Investments », *The Journal of Business*, vol. 58, n°2.
- [28].BRIYS E., BELLALAH M., MAI H.M., DE VARENNE F., 1998 : « *Options, Futures and Exotic Derivatives* », John Wiley & Sons.
- [29].DE LA BRUSLERIE H., 1990 : « *Gestion obligataire internationale* », Collection Gestion, Economica.
- [30].CANTER M.S., EDWARDS F.R., 1995 : « The Collapse of Metallgesellschaft : Unhedgeable Risks, Poor Hedging Strategy, or Just Bad Luck ? », *The Journal of Futures Markets*, vol. 15, n°3, pp 211-264.
- [31].CARTER C.A., RAUSSER G.C., SCHMITZ A., 1983 : « Efficient Asset Portfolio and the Theory of Normal Backwardation », *The Journal of Finance*, vol. 36, pp 1043-1053.
- [32].CHANG E.C., 1985 : « Returns to speculators and the theory of normal backwardation », *The Journal of Finance*, vol. XL, n°1, March.
- [33].CHO D.W., MC DOUGALL G.S., 1990 : « The supply of Storage in Energy Futures Markets », *The Journal of Futures Markets*, pp 611-621, December.
- [34].COOTNER P., 1960 : « Returns to speculators : Telser versus Keynes » *Journal of Political Economy*, n°68.
- [35].COOTNER P., 1961 : « Common elements in futures markets for commodities and bonds », *American Economic Review*, vol. 51, n°2, May.
- [36].COPELAND T.E., WESTON J.F., 1992 : « *Financial Theory and Corporate Policy* », 3<sup>rd</sup> Edition, Addison-Wesley.
- [37].CORTAZAR G., SCHWARTZ E.S., 1994 : « The Valuation of Commodity Contingent Claims », *The Journal of Derivatives*, Summer.

- [38].CORTAZAR G., SCHWARTZ E.S., 1998 : « Monte-Carlo Evaluation Model of an Undeveloped Oil Field », *Journal of Energy Finance and Development*, vol. 3, n°1, pp 73-84.
- [39].COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., 1981(a) : « A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates », *The Journal of Finance*, vol. XXXVI, n°4, September.
- [40].COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., 1981(b) : « The relation between forward prices and futures prices », *Journal of Financial Economics*, n°9, December.
- [41].COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., 1985(a) : « An intertemporal general equilibrium model of asset prices », *Econometrica*, vol. 53, n°2.
- [42].COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., 1985(b) : « A theory of the term structure of interest rates », *Econometrica*, vol 53, n°2.
- [43]. COX J.C, ROSS S.A, RUBINSTEIN M., 1979 : « Option pricing : a simplified approach », *Journal of Financial Economics*, vol. 7, pp 229-263, September.
- [44].CULP C.L., MILLER M.H., 1994 : « Hedging a Flow of Commodity Deliveries with Futures : Lessons from Metallgesellschaft », *Derivatives Quarterly*, Fall.
- [45].CULP C.L., MILLER M.H., 1995 : « Metallgesellschaft and the economics of synthetic storage », *Journal of Applied Corporate Finance*, vol. 7, n°4.
- [46].DALBARADE J.M., 1990 : « *Mathématiques des marchés financiers* », Eska.
- [47].DEAVES R., KRINSKY I., 1995 : « Do futures prices for commodities embody risk premiums ? », *The Journal of Futures Markets*, vol. 15, n°6, pp 637-648.
- [48].DELANDE M., 1992 : « *Marchés à terme : incertitude, information, équilibre* », Economica.
- [49].DIXIT A.K., PINDYCK R.S., 1995 : « The New Option View of Investment », Working Paper n°95-002, Center For Energy and Environmental Policy Research, MIT.
- [50].DUFFIE D., 1988 : « *Security Markets – Stochastic models* », Academic Press.
- [51].DUFFIE D., 1992 : « *Dynamic Asset Pricing Theory* », Princeton University Press.

- [52].DUSAK K., 1973 : « Futures trading and investor returns : an investigation of commodity market risk premiums », *Journal of Political Economy*, vol. 81, n°6.
- [53].DUT H.R., FENTON J., SMITH J.D., WANG G.H., 1997 : « Crop Year Influences and Variability of the Agricultural Futures Spreads », *The Journal of Futures Markets*, vol. 17, n°3, pp 341-367.
- [54].EDWARDS F.R., MA C.W., 1992 : « *Futures and options* », Mac Graw Hill, Inc.
- [55].EHRHARDT M.C., JORDAN J.V., WALKING R.A., 1987 : « An application of Arbitrage Pricing Theory to Futures Markets : Tests for Normal Backwardation », *The journal of Futures Markets*, vol. 7, pp 21-34.
- [56].EYDELAND A., GEMAN H., 1998: « Pricing power derivatives », *Risk*, pp 71-73, October.
- [57].FAMA E.F., FRENCH K.R., 1987 : « Commodity futures prices : some evidence of forecast power, premiums, and the theory of storage », *The Journal of Business*, vol. 60, n°1.
- [58].FAMA E.F., FRENCH K.R., 1988 : « Business Cycles and the Behavior of Metal Prices », *The Journal of Finance*, vol. XLIII, n°5.
- [59].DE FOMBELLE V., 1998 : « Mesure de la rentabilité : évaluation économique des investissements », Séminaire d'Orientation Stratégique et Economique ( Formation interne Elf Aquitaine ).
- [60].FRANKEL P., 1989 : « *Common Carrier of Common Sense* », A selection of his writings, 1946-1988, by Lan Skeet, Oxford University Press.
- [61].FRIMPONG S., WHITING J.M., 1997 : « Derivative mine valuation : strategic investment decisions in competitive markets », *Resources Policy*, vol. 23, n°4, pp 163-171.
- [62].GABILLON J., 1991 : « The term structure of oil futures prices », Working Paper, Oxford Institute for Energy Studies.
- [63].GABILLON J., 1992 : « A Two Variables Oil Future Pricing Model », unpublished, May.

- [64].GABILLON J., 1995 : « Analysing the Forward Curve », in « *Managing Energy Price risk* », Risk Publication, Enron.
- [65].GEMAN H.,1989 : « L'Importance de la Probabilité « Forward Neutre » dans une Approche Stochastique des Taux d'intérêt », Cahier de Recherche de l'ESSEC, avril.
- [66].GEMAN H., EL KAROUI N., ROCHET J.C., 1995 : « Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing », *Journal of Applied Probability*, n°32, pp 443-458.
- [67].GIBSON R., SCHWARTZ E.S., 1989 : « Valuation of long term oil-linked assets », Working Paper, Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles.
- [68].GIBSON R., SCHWARTZ E.S., 1990 : « Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims », *The Journal of Finance*, vol. XLV, n°3.
- [69]. GIRAUD P.N. ,1989 : « *L'économie mondiale des matières premières* », Collection Repères, La Découverte.
- [70].GIRAUD P.N., 1995 : « The equilibrium price range of oil ; economics, politics and uncertainty in the formation of oil prices » *Energy Policy*, vol. 23, n°1, pp 35-49.
- [71]. GIRAUD P.N., 1996 : « La formation des prix des commodités : éléments d'analyse théorique », document de cours, Université Paris IX.
- [72].GIRMA P.B., PAULSON A.S., 1998 : « Seasonality in Petroleum Futures Spreads », *The Journal of Futures Markets*, vol. 18, n°5, pp 581-598.
- [73].GOSS B.A., 1972 : « *The theory of futures trading* », Students Library of Economics, Editions Routledge & Kegan Paul, London and Boston.
- [74].GOURIEROUX C., MONFORT A., 1990 : « *Séries temporelles et modèles dynamiques* », Economica.
- [75].GOURLAOUEN J.P., 1997 : « *Théorie des taux d'intérêt* », Encyclopédie des marchés financiers, Yves Simon (Editeur), Economica.

- [76].GOURLAOUEN J.P., DE SEVERAC B., 1997 : « *Structure par terme des taux d'intérêt : les nouvelles théories* », Encyclopédie des marchés financiers, Yves Simon (Editeur), Economica.
- [77].GRAY R.W., PECK A.E., 1981 : « The Chicago wheat futures markets : recents problems in historical perspective », *Food Research Institute Studies*, vol. XVIII, n°1, pp 89-115.
- [78].GROSSMAN S.J., 1981 : « An Introduction to the Theory of Rational Expectations Under Asymmetric Information », *Review of Economic Studies*, vol. XLVIII, pp 541-559.
- [79].GUZMAN J., 1991 : « Evaluating cyclical projects », *Resources Policy*, pp 114-123, June.
- [80]. HAMMERSLEY J.M., HANDSCOMB D.C., 1964 : « *Monte Carlo Methods* », John Wiley.
- [81].HARDY C.O., 1940 : « *Risk and risk bearing* », University Chicago Press.
- [82].HARVEY A.C., 1989 : « *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter* », Cambridge University Press.
- [83].HAWTREY R.G., 1940 : « A symposium on the theory of the forward market : Mr Kaldor and the forward market » *Review of Economic Studies*, vol. 7.
- [84].HEATH D., JARROW R., MORTON A., 1992 : « Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation », *Econometrica*, vol. 60, n°1.
- [85].HEINKEL R., HOWE M.E., HUGHES J.S., 1990 : « Commodity Convenience Yields as an Option Profit », *The Journal of Futures Markets*, vol. 10, n°5, pp 519-533.
- [86].HICKS J.R., 1946 : « *Value and Capital* », London, Oxford Press.
- [87].HILLIARD J.E., REIS J., 1998 : « Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yield, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 33, n°1, pp 61-86, March.

- [88].HIRIGOYEN G., JOBARD J.P., 1989 : « Financement de l'entreprise : évolution récente et perspectives nouvelles », Encyclopédie de gestion, Y. Simon et P. Joffre (Editeurs), Economica.
- [89].HO T.S.Y., 1995 : « Evolution of Interest Rate Models : A Comparison », *The Journal of Derivatives*, Summer.
- [90].HORSNELL P, MABRO R., 1993 : « *Oil markets and prices* », Oxford.
- [91].HULL J.C., WHITE A., 1990 : « Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 25, n°1, March.
- [92].HULL J.C., 1997 : « *Options, Futures, and Other Derivatives Securities* », 3<sup>rd</sup> Edition, Prentice Hall International Editions.
- [93].JACQUILLAT B., SOLNIK B., 1990 : « *Gestion de portefeuille et des risques* », 2<sup>nd</sup> Edition, Dunod.
- [94].JEANBLANC-PICQUE M., DANA R-A., 1997 : « Arbitrage et équilibre en temps continu », *Encyclopédie des Marchés Financiers*, Y. Simon (Editeur), Economica, pp 86-111.
- [95].JEGADEESH N., PENNACCHI G.G., 1996 : « The Behavior of Interest Rates Implied by the Term Structure of Eurodollar Futures », *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol. 28, pp 426-446.
- [96].JOHNSON L.L., 1959-1960 : « The Theory of Hedging and Speculation in Commodity Futures », *Review of Economic Studies*, vol. 27, pp 139-151.
- [97].KALDOR N., 1939(a) : « Speculation and economic stability », *Review of Economic Studies*, vol. VIII, n°1, October.
- [98].KALDOR N, 1939(b) : « A note on the theory of the forward market », *Review of Economic Studies*, vol. VIII, n°1, October.
- [99].KEYNES J.M., 1930 : « *A Treatise on Money : The applied Theory of Money* », Londres, Macmillan, vol. 2.

- [100].KEYNES J.M, 1937 : « The General Theory of Employment », *Quarterly Journal of Economics*, vol. 51.
- [101].KHOURY N.T., MARTEL J-M., 1989 : « A Supply of Storage Theory with Asymmetric Information », *The Journal of Futures Markets*, vol. 9, n°6, pp 573-581.
- [102].KOLB R. W., 1992 : « Is Normal Backwardation Normal ? », *The Journal of Futures Markets*, vol. 12, n°1, pp 75-91.
- [103].KOLB R.W., 1996 : « The Systematic Risk of Futures Contracts », *The Journal of Futures Markets*, vol. 16, n°6, pp 631-654.
- [104].KRAPELS E.N., 1996 : « *Paper Oil : The State of the Markets and the Uses of Their Instruments* », Energy Security Analysis.
- [105].LAPEYRE B., PARDOUX E., SENTIS R., 1998 : « *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion* », Collection Mathématiques et Applications, n° 29, Springer.
- [106].LAUGHTON D.G., JACOBY H.D., 1993 : « Reversion, Timing Options, and Long Term Decision-Making » Center for Energy and Environmental Policy Research, Reprint Series n°115, MIT.
- [107].LAUTIER D., 1998 : « Les opérations de Metallgesellschaft sur les marchés à terme de produits pétroliers : spéculation ou couverture ? » *Finance - Contrôle - Stratégie*, vol. 1, n°3, septembre.
- [108].LEUTENEGGER M.A., 1989 : « *Gestion de portefeuille et théorie des marchés financiers* », Economica.
- [109].LEVASSEUR M., QUINTART A., 1992 : « *Finance* », 2<sup>nde</sup> édition, Economica.
- [110].LITZENBERGER H.R., RABINOWITZ N., 1995 : « Backwardation in Oil Futures Markets : Theory and Empirical Evidence », *The Journal of Finance*, vol. L, n°5, December.
- [111].LONG D., 1996 : « Oil Stocks », *Oxford Energy Forum*, November.

- [112].LUND J., 1994 : « Econometric Analysis of Continuous Time Arbitrage-Free Models of the Term Structure of Interest Rates », unpublished paper, The Aarhus School of Business.
- [113].LUND J., 1997 : « A Model for Studying the Effect of EMU on European Yield Curves », unpublished paper, the Aarhus School of Business.
- [114].MC KEE S., MITCHELL A.R., 1970 : « Alternating direction methods for parabolic equations in two space dimensions with a mixed derivative », *The Computer Journal*, vol. 13, n°1, February.
- [115].MARCUS A., 1984 : « Efficient Asset Portfolios and the Theory of Normal Backwardation : a Comment », *Journal of Political Economy*, vol. 92, pp 162-164.
- [116].MELLO A.S., PARSONS J.E., 1995 : « Maturity of a hedge matters : lessons from the Metallgesellschaft debacle », *Journal of Applied Corporate Finance*, vol. 8, n° 1.
- [117].MERTON R.C., 1990 : « *Continuous-Time Finance* », Basil Blackwell.
- [118].MILONAS N.T., THOMADAKIS S.B., 1997 : « Convenience Yields as Call Options : An Empirical Analysis » *The Journal of Futures Markets*, vol. 17, n°1, pp 1-15.
- [119].MILTERSEN K.R., SCHWARTZ E.S., 1998 : « Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 33, n°1, pp 33-59, March.
- [120].MITCHELL A.R., GRIFFITHS D.F., 1980 : « *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations* », John Wiley & Sons.
- [121].MOOSA I.A., AL-LOUGHANI N.E., 1995 : « The Effectiveness of Arbitrage and Speculation in the Crude Oil Futures Markets », *The Journal of Futures Markets*, vol. 15, n°2.
- [122].MUTH J., 1961 : « Rational Expectations and the Theory of Price Movements », *Econometrica*, vol. 29.
- [123].MYERS S.C., 1977 : « Determinants of corporate borrowing », *Journal of Financial Economics*, vol. 5, pp 147-175.



- [124].OKOGU B., 1996 : « Do public inventories crowd out private oil stocks ? », *Oxford Energy Forum*, November.
- [125].ΦKSENDAL B., 1998 : « *Stochastic differential equations* », 5<sup>th</sup> Edition, Springer Verlag.
- [126].PAUWELLS J.P., LAUWERS P, 1991 : « Réflexions sur le choc pétrolier de 1990 et propositions d'actions pour l'avenir », *Revue de l'Energie*, n°429.
- [127].PENNACCHI G.G., 1991 : « Identifying the Dynamics of Real Interest Rates and Inflation : Evidence using Survey Data », *Review of Financial Studies*, vol. 4, pp 53-86.
- [128].PILVERDIER-LATREYTE J., 1999 : « *Finance d'entreprise* », Collection Audit, Gestion, Fiscalité, 7<sup>ème</sup> Edition, Economica.
- [129].PINDICK R.S., 1980 : « Uncertainty and Exhaustible Resource Markets », *Journal of Political Economy*, vol. 88, n°6.
- [130].PINDICK R.S., 1994 : « Inventories and the short-run dynamic of commodity prices », MIT, Center For Energy and Environmental Policy Research.
- [131].PIRRONG S.C., 1997 : « Metallgesellschaft : A Prudent Hedger Ruined, or a Wildcatter on NYMEX ? » *The Journal of Futures Markets*, vol.17, n°5, pp 543-578.
- [132].POULON F., 1988 : « La monnaie dans la théorie de l'équilibre de marché », *Cahiers Français*, n°238.
- [133].PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., 1992 : « *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing* », 2<sup>d</sup> Edition, Cambridge University Press.
- [134].QUITTARD-PINON F., 1993 : « *Marchés des Capitaux et Théorie Financière* », Collection Gestion, Economica.
- [135].RENVERSEZ F., 1988 : « *Eléments d'analyse monétaire* » Memento Dalloz.
- [136].ROGER P., 1991 : « *Les outils de la modélisation financière* », Collection Finance, PUF.

- [137].ROGER P., 1997 : « *Processus stochastiques, calcul stochastique et optimisation dynamique* », Encyclopédie des marchés financiers, Yves Simon (Editeur), Economica.
- [138].ROLL R., ROSS S., 1984 : « The Arbitrage Pricing Theory Approach to Strategic Portfolio Planning », *Financial Analyst Journal*, May-June.
- [139].RONCALLI T., 1995 : « *Introduction à la programmation sous Gauss* », Editions Ritme informatique.
- [140].ROSS S.A., 1995 : « Hedging long run commitments : exercices in incomplete market pricing », preliminary version.
- [141].ROSS S. M., 1997 : « *Introduction to probability models* », Academic Press, 6<sup>th</sup> Edition.
- [142].ROUTLEDGE B.R., SEPPI D.J., CHESTER S.S., 1999 : « Equilibrium Forward Curves for Commodities », Working Paper, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, April.
- [143].SAMUELSON P.A., 1965 : « Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly », *Industrial Management Review*, vol. 6, pp 41-49, Spring.
- [144].SCHWARTZ T.V., SZAKMARY A.C., 1994 : « Price Discovery in Petroleum Markets : Arbitrage, Cointegration, and The Time Interval of Analysis », *The Journal of Futures Markets*, vol. 14, n°2.
- [145].SCHWARTZ E.S., 1997 : « The Stochastic Behavior of Commodity Prices : Implications for Valuation and Hedging », *The Journal of Finance*, vol. LII, n°3, July.
- [146].SCHWARTZ E.S., 1998 : « Valuing Long Term Commodity Assets », *Journal of Energy Finance and Development*, vol. 3, n°2, pp 85-99.
- [147].SIEGEL D.F., SIEGEL D.R., 1990 : « *The futures markets : arbitrage, risk management and portfolio strategies* », Probus Publishing Company, Chicago.
- [148].SILVAPULLE P., MOOSA I.A., 1999 : « The Relationship Between Spot and Futures Prices : Evidence From the Crude Oil Market », *The Journal of Futures Markets*, vol.19, n°2, pp 175-193.

- [149].SIMON Y., 1986 : « *Bourses de commerce et marchés à terme de marchandises* » Dalloz, 3<sup>ème</sup> Edition.
- [150].SIMON Y., 1995 : « *Marchés dérivés de Matières Premières et Gestion du Risque de Prix* », Collection Connaissance de la gestion, Economica.
- [151].STEIN J.L., 1961 : « Simultaneous determination of spot and futures prices », *American Economic Review*, vol. 51, pp 1012-25.
- [152].STEIN J.L., 1986 : « *The economics of futures markets* », Basil Blackwell.
- [153].SULZER J.R., 1997 : « Critères de choix des investissements », *Encyclopédie de Gestion*, Y. Simon, P. Joffre (Editeurs), Economica, pp 828-853.
- [154].TELSE L.G., 1958 : « Futures trading and the storage of cotton and wheat », *Journal of Political Economy*, vol. 66.
- [155].TELSE L.G., 1960 : « Reply », *Journal of Political Economy*, n°68, pp 404-415.
- [156].THOMPSON S., 1986 : « Returns to Storage in Coffee and Cocoa Futures Markets », *The Journal of Futures Markets*, vol. 6, n°4, pp 541-564.
- [157].TURNOVSKY S.J., 1983 : « The determination of spot and futures prices with storable commodities », *Econometrica*, vol. 51, n°5.
- [158].VASICEK O., 1977 : « An equilibrium characterization of the term structure », *Journal of Financial Economics*, vol. 5.
- [159].VERLEGER P.K., 1996 : « *The Link Between Financial and Physical Markets* », Charles River Associates, Boston, Washington, Palo Alto.
- [160].VERLEGER P.K., 1999 : « Was Metallgesellschaft's use of petroleum futures part of a rational corporate strategy ? », *Journal of Energy Finance and Development*, vol. 4, pp 89-115.
- [161].WEYMAR H., 1966 : « The supply of storage revisited » *American Economic Review*, vol. 56.
- [162].WEYMAR H., 1968 : « *The dynamics of the World Cocoa Market* », MIT Press.
- [163].WILLIAMS J., 1986 : « *The economic function of futures markets* », Cambridge University Press.

- [164].WILLIAMS J., WRIGHT B., 1989 : « A Theory of Negative Prices for Storage », *The Journal of Futures Markets*, vol. 9, n°1, pp 1-13.
- [165].WILLIAMS J., WRIGHT B., 1991 : « *Storage and commodity markets* », Cambridge University Press.
- [166].WILMOTT P., HOWISON S., DEWYNNE J., 1995 : « *The Mathematics of Financial Derivatives* », Cambridge University Press.
- [167]. WILMOTT P., HOWISON S., DEWYNNE J., 1998 : « *Option Pricing. Mathematical models and computation* », Oxford Financial Press.
- [168].WORKING H., 1948 : « Theory of Inverse Carrying Charges in Futures Markets », *Journal of Farm Economics*, n°30, pp 1-28.
- [169].WORKING H., 1949 : « The Theory of the Price of Storage », *American Economic Review*, n°31.
- [170].WORKING H., 1953 : « Hedging Reconsidered », *Journal of Farm Economics*, n°35, pp 544-561.
- [171].WORKING H., 1958 : « A theory of anticipatory prices », *American Economic Review*, vol. XLVIII, n°2.
- [172].WORKING H., 1962 : « New concepts concerning futures markets and prices », *American Economic Review*, pp 432-459, June.

## *ANNEXES*

# ANNEXE 1 : PRINCIPES MATHÉMATIQUES UTILISÉS.

Cette annexe est consacrée à la présentation des éléments nécessaires à la compréhension des méthodes de valorisation relative : processus stochastiques, principes fondamentaux du calcul différentiel stochastique, lemme d'Itô et martingales. Dans la majorité des cas, les modèles stochastiques sont des modèles en temps continu.

## 1. PROCESSUS STOCHASTIQUES

Un processus stochastique est un phénomène aléatoire considéré en dynamique. Les modèles stochastiques sont utilisés pour formaliser l'évolution d'un système dynamique à partir de l'état initial de ce système et d'une équation différentielle stochastique décrivant son évolution.

Les processus stochastiques les plus fréquemment utilisés en finance sont les processus markoviens. Le processus de Wiener, cas particulier de mouvement markovien, est considéré comme le mieux adapté à la modélisation des cours des actifs financiers. Il repose sur l'hypothèse selon laquelle les cours ou les rendements des titres subissent de faibles variations au cours d'intervalles de temps très courts.

Les processus présentés dans cette annexe ont des trajectoires<sup>2</sup> qui sont des fonctions continues de  $t$ . Ils se présentent comme une suite de variables aléatoires  $X_t$  où  $t$  peut prendre toutes les valeurs réelles positives. Lorsque les valeurs prises par

---

<sup>1</sup> Cette annexe est inspirée de Bisière, 1997 : « *La structure par terme des taux d'intérêt* », PUF, Collection finance.

<sup>2</sup> Définition : « On appelle trajectoires du processus  $X = (X(t), t \in T)$ , les applications  $t \rightarrow X(t, \omega)$  où  $\omega$  est un état de la nature quelconque » (Roger, 1991, p 166).

ces variables aléatoires sont elles-mêmes continues, le processus est un processus de diffusion.

### 1.1. PROCESSUS MARKOVIEN

Les processus markoviens constituent une famille à laquelle appartient la majorité des processus utilisés en finance.

*Définition 1 : Un processus  $X(t)$  est un processus de Markov si, pour toutes les valeurs de  $t$  et de  $h$ , la probabilité conditionnelle de  $X(t+h)$ , connaissant n'importe quel ensemble de réalisations de  $X(t)$ , est, pour tout  $t' < t$ , égale à la probabilité conditionnelle de  $X(t+h)$  connaissant  $X(t)$ .*

Cette définition peut être interprétée de la façon suivante : la connaissance du passé du processus n'apporte aucune information sur son évolution future ; seule sa valeur présente importe. La prévision des états futurs du processus peut être réalisée indépendamment de la trajectoire suivie pour parvenir à cet état. Le processus est donc caractérisé par l'« absence de mémoire ».

L'hypothèse de processus markovien est proche de celle d'efficience des marchés, dont la forme faible stipule que le cours d'un titre intègre la totalité de l'information contenue dans les cours passés.

### 1.2. MOUVEMENT BROWNIEN STANDARD (WIENER STANDARD)

Les prix des titres ne sont généralement pas modélisés comme des mouvements browniens, mais comme des processus dérivés de ces derniers, les processus d'Itô. Cependant, une présentation du mouvement brownien et de son comportement dynamique est un préalable nécessaire pour comprendre la modélisation des processus de prix.

Le mouvement brownien peut être considéré comme une extension au cas continu de la modélisation des aléas (chocs imprévisibles) utilisée pour les modèles dynamiques discrets.

Définition 2 : Un mouvement brownien standard  $Z = \{Z(t), t \in \mathcal{R}^+\}$  est un processus stochastique sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ <sup>3</sup> caractérisé par quatre propriétés :

- le processus démarre en zéro :  $Z(0) = 0$  ;
- pour toutes dates  $t$  et  $s$  telles que  $t < s$ , le changement du processus entre ces deux dates est distribué normalement, a une espérance nulle et une variance égale à la longueur de l'intervalle de temps considéré :  $Z(s)-Z(t) \sim N(0, s-t)$  ;
- pour toutes dates  $t_0, \dots, t_n$  telles que  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$ , les changements du processus entre deux dates successives sont indépendants ;
- les trajectoires  $Z(\omega, t)$  sont continues en  $t$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

Cette définition peut être interprétée de la façon suivante :

- le processus de Wiener est markovien : l'histoire passée du prix n'influence pas ses mouvements futurs ;
- l'espérance du changement de prix est nulle : le prix ne subit aucune dérive systématique,
- la variance du changement de prix augmente avec la longueur de l'intervalle de temps considéré : le prix n'est soumis à aucune force tendant à restaurer sa position d'origine.

Modéliser la trajectoire d'un prix à l'aide d'un mouvement brownien revient à considérer qu'un flux continu d'informations arrivant sur le marché modifie constamment les cours. Les trajectoires d'un mouvement brownien étant très irrégulières, elles ne sont dérivables en aucun point du temps.

---

<sup>3</sup> - « Soit  $E$  une expérience aléatoire ; on appelle ensemble des états de la nature (ou univers) associé à  $E$ , l'ensemble noté  $\Omega$  des résultats possibles » (Roger, 1991, p 64).

-  $\mathfrak{F}$  est une tribu sur  $\Omega$ . La notion de tribu permet de définir une structure d'information cohérente sur  $\Omega$ . La notion de tribu est la plupart du temps associée à celle de filtration. Une filtration  $\mathbf{F} \equiv \{ \mathfrak{F}_t, t \in T \}$  est une famille de sous-tribus de  $\mathfrak{F}$ . La filtration  $\mathbf{F}$  est telle que l'information la plus fine dont on puisse disposer est décrite par la tribu  $\mathfrak{F}$ . De plus, l'information s'affine avec le temps : les investisseurs accumulent progressivement de l'information, au fur et à mesure que les transactions se déroulent sur le marché (Bisière, 1997, p 23).

-  $P$  est l'ensemble des parties de l'ensemble  $\Omega$ .

-  $\omega$  est un événement élémentaire de  $\Omega$  : chaque  $\omega$  correspond à un résultat possible de l'expérience aléatoire. Dans notre contexte,  $\omega$  correspond à une évolution possible du prix du titre au cours du temps.



### 1.3. PROCESSUS D'ITO

#### • Définition

Soit  $X(t)$  le prix d'un titre à l'instant  $t$ . Pour représenter l'évolution dynamique de ce prix, on considère un processus déterministe, affecté par un choc aléatoire modélisé par un mouvement brownien  $B$ . Le processus d'Itô peut être vu comme la solution de l'équation différentielle stochastique présentée ci-dessous.

Soit  $Z = \{Z(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  un mouvement brownien standard. La position de  $X$  à l'instant  $t$  est donnée par :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(X, s)ds + \int_0^t \sigma(X, s)dZ(s) \quad (1)$$

- $X_0$  est un réel,
- $\mu(X, s)$  et  $\sigma(X, s)$  sont les paramètres infinitésimaux du processus  $X$ , définis ci-dessous,
- $dZ(s)$  est la différentielle stochastique du mouvement brownien. Elle représente son évolution aléatoire à l'instant  $s$ , sur une période de temps infiniment petite, de longueur égale à l'unité de temps  $ds$ .

La première intégrale de l'équation (1) est une intégrale classique. La seconde est l'intégrale stochastique de  $\sigma$  par rapport à  $Z$ . La forme différentielle de l'équation (1) est :

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dZ(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

- $dX(t)$  représente le changement instantané du prix du titre à l'instant  $t$ . Ce changement est composé de la somme de deux termes :
- $\mu(X, t)dt$  représente l'espérance du changement de  $X$  en  $t$ , par unité de temps.  $\mu$  est un paramètre de tendance.
- $\sigma(X, t)dZ(t)$  représente le choc exogène venant perturber la trajectoire de  $X$ . C'est la composante aléatoire de la trajectoire du prix. Le terme  $\sigma^2(X, t)$  est la variance

du changement de  $X(t)$  par unité de temps.  $\sigma(X, t)$  est le coefficient de diffusion ou paramètre de dispersion du processus.

En spécifiant  $X_0$ ,  $\mu(X, s)$  et  $\sigma(X, s)$ , le processus d'Itô permet de décrire l'évolution du prix, à partir de sa valeur initiale, de sa tendance et de sa volatilité à chaque instant.

### • Processus d'Itô : interprétation économique

L'utilisation d'un processus d'Itô suppose la réalisation d'un certain nombre d'hypothèses associées au comportement d'un cours boursier. Celles-ci concernent en premier lieu le risque lié à la détention d'un titre. Soient  $V(X)$  la variance du cours d'un titre  $X$ , et  $N$  le nombre total de transactions réalisées au cours de l'intervalle de temps  $[0, t]$  :

*H1 : Il existe une constante  $A_1 > 0$  indépendante de  $N$  telle que  $V(X) \geq A_1$ .*

Il est impossible d'éliminer complètement l'incertitude associée à la détention d'un titre, quelle que soit la durée de temps séparant deux cotations.

*H2 : Il existe une constante  $A_2 < \infty$ , indépendante de  $N$ , telle que  $V(X) \leq A_2$ .*

La réduction du délai séparant deux cotations ne conduit pas à une variance infinie du cours du titre à l'instant  $t$  : le risque associé à la détention d'un titre n'est jamais infini.

*H3 : Il existe une constante  $A_3 < \infty$ , indépendante de  $N$ , telle que pour tout  $n$  inférieur à  $N$ ,*

$$\frac{V(Y(n))}{V} \geq A_3 \quad \text{où } V = \max_{k=1}^N V(Y(k)).$$

L'incertitude n'est pas concentrée sur certaines sous-périodes de l'intervalle  $[0, t]$ . L'hypothèse 3 complète donc l'hypothèse 1. On comprend son importance lorsque l'on envisage un processus de cours pour lequel les variations de cours ont des amplitudes différentes selon les périodes de cotation.

Ces trois hypothèses permettent de préciser que le risque associé à la détention d'un actif n'est ni nul, ni infini, ni concentré sur certains moments. L'hypothèse 4 concerne le rendement du titre.

*H4 : Pour toute sous-période  $s$ , l'espérance  $\mu(s)$  est définie et il existe une constante  $A_4 < \infty$  indépendante de  $N$ , telle que  $|\mu(s)| \leq A_4$ .*

Le rendement anticipé  $\mu(s)$  reste fini quelle que soit la durée de l'intervalle de temps considérée.

*H5 : Le processus de prix est markovien<sup>4</sup>.*

*H6 : Il existe un rapport strict entre la rareté d'un événement et la puissance de son effet : plus un événement a une amplitude forte, plus sa probabilité d'occurrence doit être faible.* Toute possibilité de domination d'un événement dans l'explication des rendements obtenus sur un titre, lorsque l'intervalle de temps entre deux cotations est réduit, est exclue.

*H7 : En utilisant un processus d'Itô comme représentation d'un processus économique, on admet explicitement que les phénomènes de rupture sont négligeables dans l'explication de son comportement dynamique.*

Utiliser un processus d'Itô signifie donc que l'on n'envisage pas la possibilité d'apparition d'événements exceptionnels venant perturber le fonctionnement du marché financier. De plus, on suppose que le marché est efficient.

## 2. CALCUL DIFFERENTIEL STOCHASTIQUE

### 2.1. REGLES DE CALCUL

Le calcul stochastique est fondé sur les règles suivantes :

- L'espérance de la différentielle stochastique est nulle et sa variance égale à  $dt$  :

$$E[dZ(t)] = 0 \text{ et } \text{Var}[dZ(t)] = dt.$$

---

<sup>4</sup> Le fait qu'un processus soit markovien ne signifie pas pour autant qu'il ne sert à rien d'étudier l'historique des prix. L'examen des données passées apporte en effet des informations sur les propriétés de la dynamique du processus de prix.

- L'espérance du carré de la différentielle stochastique n'est pas aléatoire et est égal à  $dt$  :  $E[dZ(t)^2] = \text{Var}[dZ(t)] = dt$
- Le produit  $dZ(t) \times dt$  n'est pas, lui non plus, aléatoire et est égal à 0.

Ces différentes règles sont utilisées pour établir le lemme d'Itô.

## 2.2. LEMME D'ITO

Le lemme d'Itô, ou théorème fondamental du calcul stochastique, permet d'étudier les relations entre les prix ou les rendements de titres dont l'évolution est représentée par un processus stochastique. Lorsqu'un processus est caractérisé par une différentielle stochastique, on peut, en employant le lemme d'Itô, déterminer la différentielle stochastique de toute fonction suffisamment régulière de ce processus.

### • Processus d'Itô unidimensionnel

Soit un processus de Wiener standard unidimensionnel, représentant l'évolution des rendements  $X$  d'un titre. L'évolution dynamique de ces rendements s'écrit :

$$dX(t) = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dZ(t) \quad (2)$$

où  $\mu$  est la tendance de ce processus, et  $\sigma$  le paramètre de diffusion.

Soit  $Y(t) = F(X(t), t)$  le processus des rendements d'un autre titre  $Y$ . Le titre  $X$  et le titre  $Y$  sont liés par une relation  $F$ , non définie.

Le lemme d'Itô permet de déterminer les paramètres du processus  $Y(t)$ , à condition que la fonction  $F$  soit suffisamment régulière, qu'elle possède des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 et partielles d'ordre 3 bornées.

La formule de Taylor appliquée à la fonction  $F$  permet d'écrire :

$$dY(t) = F_t dt + F_x dX(t) + \frac{1}{2} F_{tt} dt^2 + F_{tx} dt dX(t) + \frac{1}{2} F_{xx} dX(t)^2 + \dots$$

où :  $F_t = \frac{\partial F(X, t)}{\partial t}$  est la dérivée première de  $F$  par rapport à  $t$ ,

$$F_x = \frac{\delta F(X,t)}{\delta X} \quad \text{est la dérivée première de F par rapport à X,}$$

$$F_{xx} = \frac{\delta^2 F(X,t)}{\delta X^2} \quad \text{est la dérivée seconde de F par rapport à X.}$$

Les règles du calcul stochastique permettent de négliger le terme  $(dt \times dX(t))$  ainsi que de remplacer  $dX(t)^2$  par  $\sigma^2 dt$ . De plus, les termes en  $dt^2$  et tous les termes ultérieurs sont négligés, ce qui permet d'obtenir la formule d'Itô :

$$dY(t) = F_t dt + F_x dX(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 F_{xx} dt$$

en remplaçant  $dX(t)$  par son expression dans l'équation (2), on obtient :

$$dY(t) = \left( F_t + \mu(X,t)F_x + \frac{1}{2} \sigma^2(X,t)F_{xx} \right) dt + F_x \sigma(X,t) dZ(t)$$

soit :

$$dY(t) = \alpha(X,t)dt + \delta(X,t)dZ(t)$$

$$\text{avec} \quad \alpha(X,t) = F_t + \mu(X,t)F_x + \frac{1}{2} \sigma^2(X,t)F_{xx}$$

$$\delta(X,t) = \sigma(X,t)F_x$$

$\alpha(X,t)$  est le générateur différentiel sur X appliqué à la fonction F. Il est noté  $L_X[F]$ .

Cette formule est à la base de toutes les évaluations d'actifs financiers dont le prix est représenté par un processus stochastique. Le lemme d'Itô permet d'exprimer les paramètres des processus suivis par Y en fonction des caractéristiques dynamiques des facteurs,  $\mu$  et  $\sigma$ , et des dérivées partielles de la fonction F, par rapport au temps et par rapport aux variables d'état.

#### • Processus d'Itô multidimensionnel

Soit un processus de Wiener standard de dimension n, représentant l'évolution des rendements d'un titre X. Ce processus se caractérise par une différentielle stochastique :

$$d\mathbf{X}(t) = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{M}(\mathbf{X},t)} dt + \underset{(n \times m)}{\mathbf{S}(\mathbf{X},t)} \underset{(m \times 1)}{d\mathbf{Z}(t)}$$

Soit  $Y(t) = F(X, t)$  la représentation générale du processus des rendements d'un autre actif financier  $Y$ . Le titre  $X$  et le titre  $Y$  sont liés par la fonction non définie  $F$ . La fonction  $F$  possède des dérivées partielles continues  $F_t$ , vecteur colonne de dimension  $(k \times 1)$ ,  $F_x$ , vecteur colonne de dimension  $(k \times 1)$ , et  $F_{xx}$ , matrice de dimension  $(n \times n)$ . Le processus  $Y(t)$  est un processus d'Itô de dimension  $k$ , défini par :

$$dY(t) = F_t dt + \sum_i F_{xi} dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j F_{xixj} dX_i(t) dX_j(t)$$

Le processus  $Y$  s'écrit sous la forme :

$$dY(t) = \underset{(k \times 1)}{A(X, t)} dt + \underset{(k \times m)}{D(X, t)} \underset{(m \times 1)}{dZ(t)}$$

avec, en notation abrégée :

$$A(X, t) = F_t + F_x M + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j F_{xixj} [SS']_{i,j} dt$$

$$D(X, t) = F \times S$$

de plus, on peut écrire :

$$\sum_i \sum_j F_{xixj} [SS']_{i,j} = \text{tr}(SS' F_{xx})$$

où « tr » désigne l'opérateur de trace<sup>5</sup>

Le générateur différentiel s'écrit ici :  $L_X [F] = F_t + F_x M + 1/2 \text{tr}(SS' F_{xx})$ .

## 2.3. MARTINGALES

La notion de martingale est employée dans le cadre des modèles probabilistes. Une variable aléatoire est une martingale pour une mesure de probabilité donnée si sa valeur à l'instant  $t$  est égale à l'espérance mathématique de son flux terminal, conditionnellement à l'information disponible à ce même instant  $t$ .

---

<sup>5</sup> La trace d'une matrice correspond à la somme des éléments de sa diagonale.

## **ANNEXE 2 : LES MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES TAUX D'INTERET**

Les modèles de structure par terme des taux d'intérêt sont inspirés des techniques de valorisation relative, développées à l'origine pour les options. Les principes de ces dernières sont présentés dans une première partie afin de montrer comment elles ont été adaptées aux actifs obligataires. L'attention est ensuite portée sur les modèles de structure par terme des taux d'intérêt. Ces derniers se répartissent en deux catégories : les modèles d'équilibre par arbitrage et les modèles probabilistes. Les éléments mathématiques nécessaires à la compréhension de cette partie sont présentés en annexe un.

### ***1. LA VALORISATION DES OPTIONS***

Le modèle de Black et Scholes (1973) constitue une référence majeure dans le domaine de la valorisation des options. Ce modèle présente une qualité essentielle : il peut être généralisé et employé à la valorisation d'actifs dérivés autres que les options sur actions. La méthodologie de l'évaluation relative développée par les deux auteurs a en effet été adaptée au marché obligataire, en premier lieu par Merton (1974), puis par de nombreux auteurs. Les hypothèses du modèle de Black et Scholes ayant été conservées dans le cadre de l'évaluation d'instruments de taux d'intérêt, celles-ci seront présentées en détail.

## 1.1. LES HYPOTHESES DU MODELE DE BLACK ET SCHOLES

Les hypothèses sur lesquelles repose la méthode de l'évaluation relative sont au nombre de six<sup>1</sup> :

1. Un produit dérivé (ou actif contingent) est un actif dont les mouvements de prix incertains sont totalement spécifiés par un ensemble de facteurs, qualifiés de « facteurs sous-jacents » ou de variables d'état : ces facteurs représentent les sources d'incertitude affectant l'évolution du prix de l'actif dérivé. Dans le cadre du modèle de Black et Scholes, le facteur sous-jacent du prix de l'option est le prix de l'action ; pour évaluer une option, il faut pouvoir représenter l'évolution future du prix de l'action. On suppose que la distribution du prix de l'action est log-normale<sup>2</sup> et que le rendement du titre suit un processus de Wiener<sup>3</sup>.
2. Le marché est parfait : il est sans friction (absence de coûts de transaction, de taxes, d'impôts) et concurrentiel. Aucune contrainte institutionnelle ne vient restreindre la vente d'actions à découvert, tous les actifs sont parfaitement divisibles, et chaque individu a accès à toute l'information concernant les prix et les caractéristiques des titres.
3. Le sous-jacent (action, obligation, contrat à terme...) ne délivre pas de dividendes au cours de l'existence de l'actif dérivé.
4. Le marché est caractérisé par l'absence d'opportunité d'arbitrage, en toutes circonstances.
5. Les transactions sont réalisées de manière continue. De plus, toutes les opérations de prêt et d'emprunt peuvent être réalisées au taux sans risque.

---

<sup>1</sup> Toutes ces hypothèses ne sont pas nécessairement explicitement formulées dans le cadre du modèle de Black et Scholes. En particulier, l'hypothèse 6 n'est pas présentée en tant que telle que par Cox, Ingersoll et Ross (1981). Elle fait cependant partie d'un ensemble cohérent, si bien qu'on peut la considérer comme implicite dans le modèle de Black et Scholes.

<sup>2</sup> Une variable a une distribution lognormale lorsque son logarithme est normalement distribué. Une variable caractérisée par une distribution lognormale peut prendre n'importe quelle valeur entre zéro et l'infini. Contrairement à la courbe de distribution normale, celle de distribution lognormale est biaisée, de telle sorte que la moyenne, la médiane et le mode ont des valeurs différentes.

<sup>3</sup> Ce processus et les raisons de son utilisation sont présentés en annexe un.



6. Les agents sont insatiables (leur satisfaction est une fonction croissante de leur richesse) et tolèrent le risque (ils sont prêts à détenir des actifs risqués à des taux de rendement anticipés finis).

Ces hypothèses forment un ensemble cohérent permettant de représenter le fonctionnement des marchés financiers :

- la première hypothèse définit les produits dérivés comme des actifs dépendants d'une combinaison de facteurs, dont le nombre est généralement réduit. Ces facteurs peuvent correspondre soit à des variables concrètes telles que le prix des actions et des obligations, soit à des variables plus abstraites, telles que l'indice S&P, le taux d'inflation,...

- le modèle repose sur l'hypothèse selon laquelle le marché est sans friction, alors que des coûts de transaction sont, dans la réalité, presque systématiquement associés aux actifs échangés. Le prix de l'option obtenu à partir du modèle doit donc être considéré comme une référence : on considère qu'un titre est correctement évalué lorsque son prix de marché se situe autour de cette référence, à l'intérieur d'une fourchette dont la taille est déterminée par les coûts de transaction.

- l'absence d'opportunité d'arbitrage garantit que le modèle permet de déterminer la « vraie » valeur de l'actif : si le titre est échangé sur le marché au prix proposé par le modèle (abstraction faite des coûts de transaction), il est correctement évalué et il n'y a aucune opportunité d'arbitrage. Si en revanche un actif est échangé à un prix de supérieur au prix théorique, il est surévalué ; à un prix inférieur, il est sous-évalué.

La quatrième hypothèse découle de la seconde : dans un marché parfait, le prix de deux titres identiques ne peut être différent. La présence d'opportunités d'arbitrage conduit immédiatement, en l'absence de coûts de transaction, à un ajustement de l'offre et de la demande de ces titres, à la disparition des opportunités d'arbitrage, et à la fixation d'un prix unique.

- l'hypothèse de transactions en temps continu (hypothèse 5) découle elle aussi directement de celle de marché parfait. Le choix du temps continu, selon Bisière (1997), peut être justifié par l'hypothèse d'absence de frictions sur le marché : si un investisseur a la possibilité d'échanger à tout instant n'importe quelle quantité d'actifs, il sera incité à réviser en permanence ses positions et raisonnera en temps

continu, même s'il ne modifie pas très fréquemment la composition de son portefeuille.

- la sixième hypothèse est la seule qui porte sur le comportement des investisseurs. La non satiété des individus garantit qu'aucun actif n'est dominé : un portefeuille construit à partir d'autres actifs ne peut pas coûter moins cher que cet actif tout en offrant, en toutes circonstances, un rendement supérieur. De plus, la tolérance au risque des individus assure que le marché peut atteindre un équilibre : l'offre excédentaire d'un actif risqué peut être absorbée à condition que son rendement espéré augmente.

De cette hypothèse, on peut donc déduire dès à présent que les prix d'équilibre des actifs contingents obtenus à partir du modèle seront indépendants des préférences des agents (hormis l'axiome de non satiété) ou de leur attitude vis-à-vis du risque. Cette simplicité est liée à l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Sous ces différentes hypothèses, le modèle de Black et Scholes montre qu'à chaque instant, il est possible de couvrir une position sur une option en achetant une action.

## 1.2. LA METHODOLOGIE DE L'EVALUATION RELATIVE

Un modèle d'évaluation d'option a pour objectif de répondre à la question suivante : quel prix donner à une option, en fonction de l'évolution anticipée du prix de son sous-jacent, de la volatilité de ce sous-jacent, du temps restant à parcourir avant l'échéance de l'option, et de son prix d'exercice ? L'objectif est donc de déterminer la valeur actuelle de l'option, en fonction de l'anticipation de son prix à l'échéance. Pour cela, plusieurs étapes sont successivement abordées : la formulation d'hypothèses sur le comportement du prix du sous-jacent, la représentation du comportement dynamique du prix de l'option et la détermination du prix de l'option à partir d'une méthode d'arbitrage.

### 1.2.1. Processus de prix du sous-jacent

Le rendement instantané de l'action, dans le modèle de Black et Scholes, suit un processus de Wiener standard. Mathématiquement, l'évolution dynamique de cette variable, en temps continu, est exprimée de la façon suivante :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dZ(t) \quad (1)$$

La variable  $S$  représente le prix de l'action. Son évolution est caractérisée par son espérance de rendement instantané  $\mu(S,t)$  et son écart-type instantané par unité de temps  $\sigma(S,t)$ <sup>4</sup>.  $Z(t)$  est un mouvement brownien standard<sup>5</sup> représentant les chocs aléatoires affectant l'évolution du prix  $S$ . Les paramètres de tendance  $\mu$  et de volatilité  $\sigma$  sont constants dans le cas d'un processus de Wiener standard. On peut donc écrire :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dZ(t) \quad (2)$$

L'hypothèse de constance de la volatilité du prix de l'action peut paraître forte a priori. Elle ne présente cependant pas un handicap dans le cadre de l'évaluation d'une option sur action : la durée de vie de l'actif contingent étant en effet limitée, on peut considérer que la volatilité de l'action ne varie pas au cours de l'existence de cet actif.

### 1.2.2. Détermination du prix de l'option

Le modèle de Black et Scholes a été construit à l'origine pour valoriser des options européennes<sup>6</sup>. Considérons donc une option d'achat européenne de prime  $C$ ,

---

<sup>4</sup>  $\mu$  est également appelé terme de dérive ou tendance, et  $\sigma$  paramètre de dispersion ou coefficient de diffusion.

<sup>5</sup> Le mouvement brownien standard et les raisons de son utilisation sont présentés en annexe un.

<sup>6</sup> Ce type d'option ne peut être exercé qu'à son échéance.

de prix d'exercice  $K$ , et de date d'expiration  $T$ . L'objectif du modèle est de déterminer  $C$ .

### 1.2.2.a. Processus de prix de l'option

Le prix d'un actif dérivé est une fonction des variables stochastiques sous-jacentes et de leur évolution dans le temps. La prime de l'option est donc une fonction du prix de l'action et du temps ; de plus, elle est déterminée par les paramètres constants que sont le prix d'exercice de l'option et son échéance. Cette dépendance peut être exprimée de la façon suivante :

$$C = C(S, t, K, T)$$

ou, plus simplement,  $K$  et  $T$  étant constants,

$$C = C(S, t) \quad (3)$$

La dynamique du prix de l'action a été représentée par un processus de Wiener standard. D'après le lemme d'Itô<sup>7</sup>, si  $S$  suit un processus de Wiener, le processus suivi par une fonction  $C$  de  $S$  est le suivant :

$$dC(S, t) = \left[ C_t + \mu SC_s + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{ss} \right] dt + \sigma SC_s dZ(t)$$

où -  $C_i$  est la dérivée première de  $C$  par rapport à la variable  $i$

-  $C_{ii}$  est la dérivée seconde de  $C$  par rapport à  $i$ .

$C$  et  $S$  sont affectés par la même source d'incertitude  $dZ$ .

En posant :

$$\alpha = \frac{1}{C} \left[ C_t + \mu SC_s + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{ss} \right] \quad \text{et}$$

$$\beta = \frac{1}{C} \sigma SC_s$$

On obtient :

$$\frac{dC(S, t)}{C(S, t)} = \alpha dt + \beta dZ(t) \quad (4)$$

où  $\alpha$  est l'espérance de rendement instantané de l'option et  $\beta$  l'écart-type par unité de temps de ce rendement. L'existence d'une relation fonctionnelle entre  $C$  et  $S$

---

<sup>7</sup> Le lemme d'Itô est présenté en annexe un.

permet donc de spécifier la dynamique du prix de l'option. La prime de l'option est ensuite obtenue à partir d'un raisonnement d'arbitrage.

### 1.2.2.b. Raisonnement d'arbitrage

La logique du modèle de Black et Scholes peut être illustrée à partir d'un exemple concret : considérons la situation d'un vendeur d'option d'achat ; celui-ci subit une perte lorsque le prix de l'action augmente et encaisse un gain dans le cas inverse. Le prix de l'option étant une fonction de celui de l'action, le vendeur peut se couvrir contre le risque de variation de prix auquel il est exposé en prenant une position inverse sur le marché des actions à celle détenue sur le marché des options, c'est-à-dire en achetant des actions. Ainsi, les gains et pertes enregistrés sur l'actif dérivé sont compensés par des pertes et gains sur le sous-jacent. Cet achat d'action peut être financé par un emprunt à court terme réalisé en prenant une position sur l'actif sans risque<sup>8</sup>. Cette stratégie de couverture conduit le vendeur d'option à détenir un portefeuille constitué d'une position courte en options, d'une position longue en actions, et d'un emprunt à court terme. L'objectif du raisonnement d'arbitrage est de lui permettre de déterminer les proportions respectives des différents actifs composant le portefeuille.

La méthode de valorisation de Black et Scholes repose sur un raisonnement similaire. Les auteurs montrent que, dans un univers où les transactions sont réalisées en continu, et en l'absence d'opportunités d'arbitrage, n'importe quel actif contingent peut être « dupliqué » par une combinaison d'actifs existants. La proportion de chaque actif au sein du portefeuille est déterminée de telle sorte que la stratégie soit non risquée, et que la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage soit respectée. Par construction, ce portefeuille doit donc respecter deux conditions : en premier lieu, la méthode d'évaluation étant fondée sur une stratégie d'arbitrage, il

<sup>8</sup> La stratégie de couverture est ainsi autofinancante.

Définition d'une stratégie autofinancante : « Soit  $S$  un processus vectoriel représentant les prix et  $(\theta(t), 0 \leq t \leq T)$  un processus vectoriel adapté, tel que l'intégrale stochastique  $\int_0^t \theta(s) dS(s)$  est définie pour tout  $t$ . On note  $V_t(\theta) = \sum_{i=0}^d \theta_i(t) S^i(t)$  la valeur en  $t$  de cette stratégie. La stratégie  $\theta$  est autofinancante si, pour tout  $t$ ,  $V_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \theta(s) dS(s)$  », Jeanblancpicqué M., Dana R-A., 1997.

doit être non risqué ; de plus, pour respecter l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, si le portefeuille est effectivement non risqué, son rendement doit être égal au taux sans risque  $r(t)$ .

Dans le cas d'une option sur action, le portefeuille d'arbitrage est composé de trois types d'actifs : actions, options, et investissement dans l'actif sans risque. Sa valeur instantanée  $V(t)$ , est la suivante :

$$V(t) = x_1 S(t) + x_2 C(t) + x_3 Q(t) \quad (5)$$

On note  $x_i$  la proportion d'actif  $i$  dans le portefeuille à l'instant  $t$ , et  $Q(t)$  le montant investi dans l'actif sans risque en  $t$ .

L'évolution de la valeur du portefeuille est :

$$dV(t) = x_1 dS(t) + x_2 dC(t) + x_3 dQ(t)$$

Les valeurs de  $dS(t)$  et de  $dC(t)$  sont données par les équations (2) et (4).  $Q$  représentant le montant investi dans l'actif sans risque, on pose  $dQ(t) = r(t)$ . En remplaçant  $dS(t)$ ,  $dC(t)$  et  $dQ(t)$  par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{V(t)} &= x_1 (\mu dt + \sigma dZ(t)) + x_2 (\alpha dt + \beta dZ(t)) + x_3 r dt \\ \Leftrightarrow \frac{dV(t)}{V(t)} &= (x_1 \mu + x_2 \alpha + x_3 r) dt + (x_1 \sigma + x_2 \beta) dZ(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Le rendement du portefeuille peut être exprimé comme la somme de deux éléments : le premier est une combinaison linéaire des rendements anticipés des actifs qui le composent, le second reflète le risque associé à ces actifs.

Pour que le portefeuille soit non risqué et respecte l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, il faut que le second terme de l'équation (6) soit nul ; de plus, son rendement anticipé, représenté par le premier terme de l'équation (6), doit être égal au taux sans risque. Le respect de ces deux conditions suppose donc que le système suivant soit résolu :

$$\begin{cases} x_1 \sigma + x_2 \beta = 0 \\ x_1 \mu + x_2 \alpha + x_3 r = r(t) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

La troisième équation de ce système exprime simplement le fait que la somme des proportions d'actifs au sein du portefeuille doit être égale à l'unité. Les proportions optimales d'actions et d'options du portefeuille sont déterminées à partir de la première équation du système :

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = -\frac{\beta}{\sigma} \quad (7)$$

Ces pondérations déterminent le ratio de couverture (delta) de l'opérateur. Ce ratio correspond au rapport des variations des prix de l'option et du sous-jacent. Ces variations étant considérées en temps continu, sur un intervalle de temps très réduit, ce portefeuille doit en permanence être restructuré.

Le fait qu'un portefeuille non risqué puisse être construit repose sur l'hypothèse d'une parfaite corrélation entre le prix de l'action et celui de l'option : les deux actifs sont supposés être affectés par la même source d'incertitude. Le gain (perte) issu de la position en action doit toujours parfaitement compenser la perte (le gain) provenant de la position en option, de telle sorte que la valeur du portefeuille à la fin de la période soit toujours connue avec certitude.

### 1.2.2.c. Equation fondamentale de valorisation

La résolution du système précédent permet d'obtenir une relation entre les différents paramètres des processus de prix. En introduisant le paramètre  $\delta$ , on peut écrire :

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\alpha - r}{\beta} = \delta \quad (8)$$

$$\begin{cases} \alpha - r = \delta\beta \\ \mu - r = \delta\sigma \end{cases} \quad (9)$$

En remplaçant  $\alpha$  et  $\beta$  par leurs valeurs dans l'équation (9), on obtient :

$$C_t + \mu SC_s + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{ss} - rC = \sigma SC_s$$

Ce qui, compte tenu de la relation entre  $\mu$  et  $\sigma$  donnée par l'équation (9-2), permet d'obtenir l'équation différentielle de valorisation de l'option :

$$C_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{ss} - rC + rSC_s = 0 \quad (10)$$

La prime  $C$  de l'option est une solution de cette équation. Plus généralement, cette équation permet de valoriser tout actif dérivé dépendant d'une action ne délivrant pas de dividende au cours de sa durée de vie.

Le prix de l'actif contingent obtenu lorsque l'équation est résolue dépend des conditions aux limites qui lui sont associées. Dans le cas d'une option européenne sur action, cette condition peut être exprimée de la façon suivante :

$$C(S(T), T) = \max(0, S(T) - K) \quad (11)$$

En  $T$ , date d'expiration de l'option d'achat, son détenteur peut acheter l'action au prix  $K$  d'exercice de l'option. Cette opération n'est intéressante que si, à cette date, le prix du sous-jacent  $S(T)$  est supérieur à  $K$ . Compte tenu de cette condition aux limites, on démontre que l'équation (11) a pour solution :

$$C(S, t) = S(t) \times N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (12)$$

où  $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et où :

$$d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T-t}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \ln \frac{S}{Ke^{-rT}} - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T-t}$$

$N(d_2)$  est la probabilité d'exercice de l'option d'achat ;  $d_2$  détermine le seuil au-delà duquel la valeur du sous-jacent à l'échéance devient supérieure au prix d'exercice.

La formule de Black et Scholes permet donc de calculer la prime à l'instant  $t$  d'une option d'achat européenne à partir du prix de l'action  $S(t)$ , de la volatilité de l'action  $\sigma$ , du taux d'intérêt à court terme  $r$ , du prix d'exercice  $K$ , et de la date d'échéance  $T$ . Cette formule est fréquemment inversée pour obtenir, à partir du prix d'une option existante, la volatilité implicite du sous-jacent.

L'observation de l'équation (10) permet de constater qu'aucune des variables  $y$  apparaissant ne se réfère à l'attitude par rapport au risque des investisseurs. On peut donc retenir l'hypothèse la plus simple selon laquelle les investisseurs sont neutres par rapport au risque. La formule de Black et Scholes peut néanmoins être



obtenue dans un univers où les investisseurs présentent une aversion par rapport au risque, en employant le modèle du CAPM.

### 1.3. CONCLUSION

Le modèle de Black et Scholes présente trois caractéristiques essentielles : en premier lieu, le prix de l'actif dérivé est obtenu à partir de celui de l'action sous-jacente ; le modèle ne se préoccupe donc pas du fait que l'action soit ou non correctement évaluée. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, ce doit être le cas. Ensuite, la valorisation de l'actif dérivé repose sur une technique de couverture dynamique : pour être non risqué, le portefeuille d'arbitrage doit être restructuré en permanence. Enfin, ce modèle est à la base d'une technique d'évaluation plus générale. Cette technique repose sur le principe selon lequel, sur des marchés complets<sup>9</sup>, n'importe quel actif nouveau peut être dupliqué par un portefeuille d'actifs existants, à condition que, pour éviter toute opportunité d'arbitrage, le prix de l'actif dérivé et le prix du portefeuille soient égaux.

## 2. MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES TAUX

Le modèle de Black et Scholes, à condition d'être modifié de façon adéquate, peut être employé à la valorisation d'un grand nombre d'actifs risqués. Selon les termes de Cox, Ross, et Rubinstein (1979) :

*« ...[la théorie des options] peut être appliquée à une classe très générale de problèmes économiques – la valorisation de contrats où le profit de chaque partie dépend d'un événement futur incertain et quantifiable »<sup>10</sup>*

---

<sup>9</sup> Définition des marchés complets : « Un actif contingent est une variable aléatoire  $t_T$ -mesurable, de carré intégrable. On dit que  $H$  est simulable s'il existe une stratégie autofinancante admissible telle que  $\theta(T) \times S(T) = H$ . Un marché est complet si tout actif contingent est simulable. » Jeanblancpicqué M., Dana R-A., 1997.  $S(T)$  est le prix à l'instant  $T$  d'actifs risqués,  $\theta(T)$  est la proportion d'actifs de prix  $S$  détenue en portefeuille.

<sup>10</sup> Cox, Ross, Rubinstein, 1979 : « ...[the theory of options] applies to a very general class of economic problems - the valuation of contracts where the outcome to each party depends on a quantifiable uncertain future event ».

Les instruments de taux peuvent être considérés comme des actifs contingents au taux d'intérêt. Lors de la transposition de la technique d'évaluation de valorisation relative aux obligations, les principales étapes de cette technique sont retenues : identification du nombre et de la nature des variables d'état, mise en évidence de la dynamique temporelle de ces variables, et extraction du prix des actifs contingents à cette dynamique à partir d'une équation différentielle fondamentale de valorisation.

Pour valoriser des instruments de taux, certaines modifications tenant compte des spécificités de ces actifs doivent être réalisées : le modèle de Black et Scholes suppose que le taux sans risque est constant ; cette hypothèse ne peut être retenue pour expliquer la déformation stochastique de la courbe des taux de rendement. De plus, il suppose que la volatilité du prix de l'action est constante ; or la volatilité d'une obligation est une fonction croissante de sa maturité résiduelle : son prix converge à l'échéance vers sa valeur nominale. L'incertitude associée au prix diminue donc au fur et à mesure que la date de remboursement approche ; l'hypothèse de constance de la volatilité ne peut donc être retenue. Enfin, une différence essentielle distingue le modèle de Black et Scholes des modèles de structure par terme des taux d'intérêt : contrairement aux actions, les taux d'intérêt instantanés ne sont pas des actifs directement échangés sur le marché et ne peuvent pas être utilisés directement pour construire un portefeuille d'arbitrage. La formule d'évaluation des zéros-coupons dépend donc du prix de marché du risque associé à chaque facteur sous-jacent<sup>11</sup>.

Deux types d'approches ont été employées pour valoriser les instruments de taux : les modèles d'équilibre par arbitrage et les modèles probabilistes.

---

<sup>11</sup> L'apparition d'une prime de risque dans les modèles de structure par terme des taux d'intérêt est liée au fait qu'au moins une variable d'état est identifiée au taux d'intérêt à court terme, qui n'est pas un actif échangé comme l'est une action. Le taux d'intérêt à court terme ne peut pas être utilisé directement pour construire un portefeuille de couverture : l'investisseur ne peut acheter un titre dont la rentabilité suivra exactement le même processus d'évolution que cette variable d'état. Parce qu'il n'est pas assuré du rendement qui lui sera accordé, l'investisseur prend un risque en échange duquel il demande une rémunération : la prime de risque.

## 2.1. LES MODELES D'EQUILIBRE PAR ARBITRAGE

Les modèles d'équilibre par arbitrage se scindent en deux catégories : les modèles d'équilibre partiel, dans lesquels les dynamiques des facteurs sous-jacents et les primes de risque qui leur sont associées sont posées *a priori*, et les modèles d'équilibre général, dans lesquels ces éléments sont déterminés de façon endogène.

L'analyse est centrée sur des zéro-coupons non risqués, afin de s'assurer que seule la maturité permet de distinguer les titres. Les prix des obligations avec coupon se déduisent facilement de ceux des zéro-coupons : une obligation peut en effet être décomposée en une somme de zéro-coupons. Si de plus cette obligation comporte des clauses d'amortissement ou est convertible, la valorisation est plus compliquée, mais reste possible. En revanche, si elle comporte un risque de défaut, la mise en pratique de la méthode de valorisation devient délicate.

### 2.1.1. Modèles d'équilibre partiel

La première réelle généralisation de la méthode de valorisation relative est due à Cox, Ingersoll et Ross (1981). Le modèle présenté par ces auteurs peut être considéré comme une « ossature » permettant de comprendre tous les modèles d'équilibre partiel.

#### 2.1.1.a. Hypothèses

Les auteurs caractérisent la structure de l'économie par les hypothèses suivantes :

1. Il existe un vecteur  $\mathbf{Y}$  de  $N$  variables d'état dont la valeur courante représente l'information disponible. Ce que représentent les variables d'état n'est pas précisé à l'origine.

2. Les variables d'état suivent conjointement un processus markovien caractérisé par l'existence de K chocs aléatoires, K étant inférieur à N<sup>12</sup>.
3. Tous les investisseurs sont persuadés que l'économie est telle que l'hypothèse 1 la décrit, et ont des croyances homogènes quant à la valeur des paramètres du modèle. Les investisseurs utilisent de façon optimale toute l'information à leur disposition pour prévoir le futur : leurs anticipations sont rationnelles.

Les autres hypothèses sont identiques à celles présentées dans le cadre du modèle de Black et Scholes<sup>13</sup>.

### 2.1.1.b. Dynamique des variables d'état

L'hypothèse 2 conduit à représenter la dynamique des variables d'état par le système d'équations différentielles suivant :

$$dY_n(t) = \mu_n(Y, t)dt + \sigma_n'(Y, t)dZ(t) \quad (13)$$

- $\mu_n(Y, t)$  est l'espérance du changement de la variable d'état  $Y_n$  par unité de temps,
- $\sigma_n(Y, t)$  est un vecteur de dimension K, mesurant la réponse de la n<sup>ième</sup> variable d'état à chacune des K sources d'incertitude de l'économie.  $\sigma_{n,k}^2(Y, t)$  est la variance du changement de  $Y_n$  pour une unité de temps, expliquée par la k<sup>ième</sup> source d'incertitude. Toutes les variables d'état  $Y_k$  sont soumises aux mêmes K chocs aléatoires, mais chacune y répond de façon différente.

### 2.1.1.c. Processus de prix de l'actif contingent

Comme dans le cadre de la valorisation des options, et comme le précise l'hypothèse 1, le prix P d'une obligation d'échéance T est une fonction des variables d'état sous-jacentes et du temps :

$$P(t, T) \equiv P(Y, t, T) \quad (14)$$

$P(Y, t, T)$  est le prix courant en t d'une obligation zéro-coupon d'échéance T, dont la valeur nominale en T est égale à une unité monétaire.

<sup>12</sup> Toutes les variables d'état ne sont donc pas nécessairement stochastiques.

<sup>13</sup> L'utilisation du temps continu pour les instruments de taux suppose cependant non seulement que les obligations et autres actifs financiers sont échangés à tout instant, mais aussi que des obligations parviennent à maturité à tout instant.

Le taux de rendement instantané<sup>14</sup> de l'obligation zéro-coupon peut être décomposé en un taux de rendement anticipé et une variance non anticipée, liée à l'existence de K sources d'incertitude :

$$\frac{dP(\mathbf{Y}, t, T)}{P(\mathbf{Y}, t, T)} = \alpha(\mathbf{Y}, t, T)dt + \delta'(\mathbf{Y}, t, T)dZ(t) \quad (15)$$

- $\alpha(\mathbf{Y}, t, T)$  est l'espérance mathématique du taux de rendement instantané,
- $\delta(\mathbf{Y}, t, T)$  est la volatilité non anticipée de ce taux de rendement.

Les prix des zéros-coupons étant liés aux variables d'état, l'application du lemme d'Itô permet, à partir des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  décrivant la dynamique des variables d'état, de définir les paramètres infinitésimaux du processus de prix de l'obligation :

$$\begin{aligned} \alpha(Y, t, T) &= \frac{1}{P} \left( \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^2 P_{YY}) + P_{Y\mu} + P_t \right) \\ \alpha(Y, t, T) &\equiv \frac{1}{P} [L(P)] \\ \delta'(Y, t, T) &= \frac{1}{P} (P_Y \sigma) \end{aligned}$$

où  $L(P)$  est le générateur différentiel<sup>15</sup> de  $P$  sur les variables d'état.

Les titres étant non risqués, ils seront nécessairement remboursés à l'échéance. La condition terminale  $P(\mathbf{Y}, T, T) = 1$  peut donc être associée à l'équation différentielle ci-dessus<sup>16</sup>. A ce stade, pour obtenir une solution qui permette de décrire la courbe des zéros-coupons, et par extension celle des obligations, il faut encore préciser la relation qui unit les différents paramètres du processus de prix du zéro-coupon. Cette étape est franchie, comme dans le cas des options, en employant un raisonnement par arbitrage.

#### 2.1.1.d. Raisonnement d'arbitrage

Dans un marché complet sans opportunité d'arbitrage, tout actif contingent peut être dupliqué par une combinaison linéaire d'actifs existants. Soient un

<sup>14</sup> Le taux de rendement instantané est le pourcentage de variation instantané du prix de l'obligation. On suppose que l'obligation est revendue un instant  $dt$  après, alors que sa maturité s'est réduite de  $dt$ .

<sup>15</sup> La notion de générateur différentiel est présentée en annexe un.

<sup>16</sup> La valeur à l'échéance de l'obligation zéro-coupon est égale à 1.

portefeuille composé de  $K+1$  titres risqués de maturités distinctes<sup>17</sup>, et  $x_i$  la proportion de chacun de ces titres au sein du portefeuille. Le rendement instantané du portefeuille et celui de l'actif contingent devant être égaux, on peut écrire :

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \sum_{i=1}^{K+1} x_i \frac{dP(Y, t, T_i)}{P(Y, t, T_i)} = \sum_{i=1}^{K+1} x_i \alpha_i(Y, t, T_i) dt + \sum_{i=1}^{K+1} x_i \delta'_i(Y, t, T_i) dZ(t) \quad (16)$$

De plus, la proportion de chaque actif est déterminée de telle sorte que le portefeuille soit localement non risqué<sup>18</sup>, ce qui implique :

$$\sum_{i=1}^{K+1} x_i \delta_k(Y, t, T_i) = 0$$

Enfin, pour que la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage soit respectée, il faut qu'à l'équilibre, le taux de rendement anticipé du portefeuille soit égal au taux d'intérêt sans risque, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{K+1} x_i \alpha(Y, t, T_i) &= r(Y, t) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{K+1} x_i [\alpha(Y, t, T_i) - r(Y, t)] &= 0, \text{ puisque } \sum x_i = 1 \end{aligned}$$

Pour déterminer les proportions optimales du portefeuille d'arbitrage, il faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \alpha(Y, t, T_1) - r(t) & \dots & \alpha(Y, t, T_{K+1}) - r(t) \\ \delta_1(t, T_1) & \dots & \delta_1(t, T_{K+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_K(t, T_1) & \dots & \delta_K(t, T_{K+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour que ce système possède une solution<sup>19</sup>, il faut que le déterminant de la matrice carrée de dimension  $K+1$  soit nul, et que le rang de cette matrice soit strictement inférieur à  $K+1$ . Lorsque le déterminant est nul, il existe une relation de dépendance entre les lignes du système. On peut donc déterminer une combinaison linéaire de ces lignes, égale à un vecteur ligne nul.

<sup>17</sup> Les maturités de chaque obligation sont arbitrairement choisies.

<sup>18</sup> Un portefeuille est localement non risqué lorsque son risque instantané est nul.

<sup>19</sup> La solution correspondant à  $x_i = 0 \forall i$  n'est pas prise en considération.

Cette propriété algébrique est totalement indépendante des titres sélectionnés : les coefficients de la combinaison linéaire ne dépendent pas des échéances  $T_K$  choisies pour chaque obligation.

### 2.1.1.e. Détermination des primes de risque

Les lignes de la matrice carrée présentée ci-dessus sont dépendantes les unes des autres. Les maturités des zéros-coupons ayant été arbitrairement choisies, la relation linéaire entre les lignes de cette matrice ne peut pas dépendre des échéances des titres. Ainsi pour un vecteur  $\lambda_p'(Y,t)$  de dimension  $K$ , indépendant de la maturité, on peut écrire :

$$\frac{\alpha(Y,t,T) - r(t)}{\delta(Y,t,T)} = \lambda_p'(Y,t)$$

En posant :

$$\lambda(Y,t) = \lambda_p'(Y,t) \cdot \delta,$$

on obtient :

$$\alpha(Y,t,T) - r(t) = \frac{1}{P(Y,t,T)} (P_Y \lambda) \quad (17)$$

Cette équation décrit les taux de rendement exigés sur tous les actifs dont la valeur dépend uniquement des  $N$  variables d'état de l'économie. Elle est qualifiée de condition d'équilibre : si elle n'est pas valable pour les obligations zéros-coupons de toutes les maturités, des opportunités d'arbitrage apparaissent. Le terme de gauche de l'équation (18) correspond au rendement espéré exigé au-delà du taux sans risque pour accepter de détenir, pendant un instant, un zéro-coupon d'échéance  $T$ . L'expression  $[\alpha(Y,t,T) - r(t)]$  s'identifie donc à une prime de terme instantanée à la date  $t$  :  $\phi(Y,t,T)$ .

Le  $k^{\text{ième}}$  élément du vecteur  $\lambda$  représente le prix de marché du risque associé à la variable d'état  $k$ , également appelé prime de risque unitaire. Cette prime correspond à la compensation offerte à l'équilibre pour accepter de supporter le risque de type  $k$ . La prime de terme  $\phi$  s'interprète alors comme une combinaison linéaire des primes de risques unitaires  $\lambda_k$  pondérée par la quantité de risque de type  $k$  associée à chaque obligation. Le fait que la prime de terme  $\phi$  soit indépendante de

la maturité des titres permet de simplifier leur valorisation : plutôt que d'avoir à déterminer le rendement anticipé de chaque obligation, le seul élément exogène à identifier est le prix de marché du risque associé à chaque facteur sous-jacent.

Si le vecteur  $\lambda$  des primes unitaires est nul, la prime de terme  $\phi$  est nulle, ce qui signifie que le marché ne rémunère pas le risque associé à la détention d'un titre risqué tel qu'une obligation zéro-coupon. Une telle hypothèse n'est donc envisageable que si les acteurs sont myopes face aux risques associés aux variations des facteurs sous-jacents.

### 2.1.1.f Equation de structure par terme

En remplaçant  $\alpha$  par sa valeur dans l'équation (17), on obtient l'équation générale de valorisation des obligations zéros-coupons :

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^2 P_{YY}) + (\mu - \lambda)P_Y - rP + P_t = 0 \quad (18)$$

Cette équation indique que la courbe des rendements dépend, à chaque instant, de la dynamique des facteurs sous-jacents et des primes de risque associées à chacune de ces sources d'incertitude. Associée à la condition aux bornes  $P(Y, T, T) = 1$ , l'équation de structure par terme permet d'obtenir la structure des prix des obligations zéros-coupons et, en utilisant la relation entre prix des obligations et taux d'intérêt, la structure des taux d'intérêt. Déterminées par les conditions aux bornes associées à l'équation fondamentale de valorisations, les solutions de cette équation ne sont pas toujours définies analytiquement. Dans ce cas, il faut les déterminer à l'aide de méthodes de calcul numériques.

Dans ce modèle, le prix d'un zéro-coupon dépend donc du nombre de facteurs sous-jacents, du processus retenu pour modéliser leur comportement dynamique, des formes des primes de risque, et des covariances entre les différents facteurs. A partir de cette ossature, en fixant les valeurs respectives de  $K$  et de  $N$ , il est possible de retrouver tous les modèles d'équilibre partiel. Le chapitre quatre de cette thèse présente trois modèles d'équilibre partiel de structure par terme des prix des commodités.



### *2.1.2. Modèles d'équilibre général*

Le modèle d'équilibre général de référence est celui proposé par Cox, Ingersoll et Ross en 1985, dans le prolongement de celui présenté en 1981. Celui-ci permet de déterminer de façon endogène la nature et le nombre des facteurs sous-jacents, ainsi que la forme des primes de risque. Dans ce modèle, les facteurs sous-jacents identifiés sont les processus de production, ainsi que le comportement de consommation et d'investissement des individus.

Dans ce cadre théorique, la courbe de taux devient elle-même un actif dérivé dépendant des actifs réels de l'économie. Les primes de risque unitaires associées à chaque facteur sous-jacent dépendent de la technologie de production, des dotations initiales des individus et de leurs préférences. La valeur actualisée d'une obligation zéro-coupon est la valeur d'équilibre résultant du choix de répartition intertemporelle de consommation d'un individu rationnel recherchant la maximisation de son utilité. La hiérarchie des taux résulte des anticipations, de l'aversion au risque, des opportunités d'investissement et des préférences intertemporelles des individus.

Pour obtenir une solution d'équilibre explicite, il est nécessaire de spécifier, d'une part, les technologies de production disponibles et les caractéristiques de l'incertitude qui les affecte, d'autre part les préférences individuelles. Les auteurs développent à cet effet un modèle monofactoriel, dont la variable d'état unique est le taux d'intérêt à court terme.

Les modèles d'équilibre général, s'ils ont un contenu théorique plus conséquent que les modèles d'équilibre partiel, peuvent cependant aboutir à une mauvaise valorisation des obligations zéros-coupons, si l'économie n'est pas correctement spécifiée, ou si sa représentation est trop simplifiée par rapport à la réalité.

## 2.2. L'APPROCHE PROBABILISTE

L'une des limites des modèles d'équilibre par arbitrage est liée à la nécessité d'estimer la prime de risque. La méthode d'évaluation « risque-neutre » permet de contourner cette difficulté. Elle repose, comme la précédente, sur le principe de non arbitrage et considère la variable d'état sur laquelle repose l'analyse comme un facteur exogène : les modèles probabilistes sont eux aussi des modèles d'équilibre partiel. Leur principale différence avec les modèles présentés au début de cette seconde partie réside dans le fait que la connaissance de l'aversion au risque des investisseurs devient inutile pour valoriser les actifs obligataires.

Présentée pour la première fois par Heath, Jarrow et Morton en 1992, la méthode probabiliste repose sur la modification des probabilités associées aux événements susceptibles de se produire, c'est-à-dire aux différentes valeurs envisagées pour les variables stochastiques sous-jacentes. On passe ainsi de l'univers des probabilités historiques, caractéristique des modèles d'équilibre classiques, à celui de la probabilité « risque-neutre », ou probabilité-Q ; ces deux catégories de probabilités se correspondent dans la mesure où les événements strictement impossibles dans un cas le sont également dans l'autre. La probabilité-Q, unique si les marchés sont complets, est la probabilité sous laquelle les prix des actifs se comportent comme si les investisseurs étaient neutres au risque<sup>20</sup>. La méthode probabiliste repose sur l'intuition selon laquelle il est équivalent d'imposer la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage et d'affirmer que la probabilité-Q existe.

La méthode adoptée par Heath, Jarrow et Morton est la suivante : au lieu d'utiliser, comme dans le cas des modèles d'équilibre par arbitrage, les facteurs sous-jacents comme variables d'entrée du modèle, c'est la courbe des taux à terme qui est employée. Un processus stochastique décrit l'évolution de cette courbe dans le temps ; ce processus est spécifié de telle sorte qu'il respecte la condition d'absence

d'opportunité d'arbitrage. Le développement d'un modèle de type monofactoriel similaire à ceux présentés précédemment (dans ce cas, la variable d'état unique est la courbe des rendements) conduit alors à une formule de valorisation des actifs contingents qui, sous la probabilité  $Q$ , ne dépend pas de primes de risque.

Cette façon de procéder représente une innovation à plusieurs égards : en premier lieu, la dynamique stochastique est appliquée directement à la courbe des taux et non aux facteurs sous-jacents ; ensuite, l'inversion de la structure par terme n'est plus nécessaire, la question des primes de risque étant éliminée ; enfin, en prenant la courbe des taux à terme comme point de départ, la méthode probabiliste utilise toute l'information que recèle cette courbe à un instant donné.

Les principaux résultats de l'approche probabiliste, valables uniquement sous la probabilité- $Q$ , sont au nombre de trois : le prix d'une obligation zéro-coupon est égal à la valeur actualisée au taux sans risque du flux financier qu'il procure à l'échéance ; de plus, l'espérance du rendement instantané d'une obligation sans coupon est le taux sans risque ; enfin, le prix d'une obligation, actualisé à l'instant initial, suit une martingale : sa valeur à une date  $t$  est égale à l'espérance mathématique de sa valeur terminale, conditionnellement à l'information disponible en  $t$ .

Ces différents résultats sont compréhensibles intuitivement : dans un univers certain, on peut démontrer que la valeur à l'équilibre d'un actif financier ne versant pas de dividende est égale à sa valeur terminale actualisée. Dans une situation d'incertitude, ce n'est plus le cas, sauf si l'on se situe, à l'aide d'un changement de probabilité, dans un univers neutre au risque.

Le principal attrait de la méthode probabiliste réside dans sa simplicité : les formules d'évaluation des zéros-coupons conduisent aux mêmes résultats que celles des modèles d'équilibre par arbitrage, mais la résolution d'équations différentielles est remplacée par un calcul d'espérance mathématique. Le taux d'actualisation est le taux sans risque. Notons cependant que les difficultés de l'estimation de la

---

<sup>20</sup> Se situer dans un univers risque-neutre n'implique pas nécessairement de supposer que les investisseurs n'ont pas d'aversion pour le risque.

probabilité risque neutre viennent remplacer celles de l'estimation de la prime de risque.

### 2.1.1.b. Modèles à un facteur

Lorsqu'une seule variable d'état est retenue comme facteur explicatif de l'évolution du prix de l'actif contingent, celle-ci est toujours identifiée au taux d'intérêt à court terme. Dans ce cas, cette variable représente à elle seule toute l'information pertinente. Le choix du taux d'intérêt à court terme comme unique variable d'état est justifié par l'importance que lui accordent les théories traditionnelles comme facteur déterminant des anticipations des taux à long terme ou des différentiels de taux.

Merton (1974) est le premier à avoir employé la méthode de l'évaluation relative dans le domaine des obligations. Les résultats de son modèle ne sont cependant pas toujours satisfaisants car non représentatifs sur le plan économique. Celui de Vasicek (1977), employant un processus stochastique différent pour représenter le comportement dynamique du taux d'intérêt à court terme, est fréquemment utilisé.

#### *Le modèle de Merton :*

Dans le modèle de Merton, comme dans celui de Black et Scholes, les paramètres du processus de diffusion du facteur sous-jacent sont considérés comme constants. L'évolution du taux à court terme est donc décrite par une équation similaire à l'équation (2) :

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dZ(t) \quad (20)$$

$\mu$  est l'espérance de rendement du taux à court terme,  $\sigma^2$  est la variance non anticipée ;  $Z(t)$  est un mouvement brownien standard ; il représente les chocs aléatoires affectant l'évolution du taux à court terme.

Conformément à l'hypothèse 3 présentée dans le cadre du modèle général, les investisseurs considèrent que le taux à court terme rassemble toute l'information pertinente permettant de prévoir l'évolution du prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$  :

$$P(t,T) \equiv P(r,t,T) \quad (21)$$

Les prix des obligations étant liés au taux d'intérêt à court terme, l'application du lemme d'Itô permet, à partir des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  décrivant le processus du taux à court terme, de définir les paramètres infinitésimaux du processus de prix de l'obligation :

$$\begin{aligned} \frac{dP(r,t,T)}{P(r,t,T)} &= \alpha(t,T)dt + \delta(t,T)dZ(t) \\ \text{avec } \begin{cases} \alpha(t,T) = \frac{1}{P} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} + \mu P_r + P_t \right] \\ \delta(t,T) = \frac{1}{P} [\sigma P_r] \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

$\alpha(t,T)$  est l'espérance mathématique du rendement instantané de l'obligation ;  $\delta^2(t,T)$  est la variance non anticipée de ce rendement, engendrée par les variations imprévues du taux à court terme.

Le raisonnement d'arbitrage permet de préciser la relation entre le prix de l'obligation zéro-coupon et le prix de marché du risque attaché au taux à court terme. La condition d'équilibre obtenue à l'issue de ce raisonnement est la suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(t,T) - r(t) &= \lambda_P(t) \delta(t,T) \\ \Leftrightarrow \alpha(t,T) &= r(t) + \lambda_P(t) \delta(t,T) \end{aligned} \quad (23)$$

Le rendement attendu de l'obligation,  $\alpha(t,T)$ , est composé d'un élément certain, le taux sans risque  $r(t)$ , et d'une prime de risque  $[\lambda_P(t) \delta(t,T)]$ , exigée par le marché. Cette prime proportionnelle à l'écart-type instantané  $\delta(t,T)$  de l'obligation zéro-coupon.  $\lambda_P$  est le prix unitaire du risque associé au taux d'intérêt à court terme ; il est indépendant de la maturité des titres.

En remplaçant  $\delta$  par sa valeur dans l'équation (22) et  $\alpha$  par sa valeur dans l'équation (23), on obtient l'équation de structure par terme des taux :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} + (\mu - \lambda) P_r - rP + P_t = 0 \quad (24)$$

où  $\mu$ ,  $\lambda$ , et  $\sigma$  sont des constantes. Sous la condition terminale  $P(T,T)=1$ , la solution de cette équation est :

$$P(t,T) = \exp\left(- (T-t)r(t) - \frac{(T-t)^2 (\mu - \lambda)}{2} + \frac{(T-t)^3 \sigma^2}{6}\right) \quad (25)$$

La structure par terme des prix, donnée par l'équation (25), permet d'étudier comment le prix du zéro-coupon évolue lorsque le taux d'intérêt à court terme varie. Le calcul de la dérivée du prix par rapport au taux d'intérêt donne :

$$\frac{P_r}{P} = -(T-t) < 0$$

Le prix du zéro-coupon augmente lorsque le taux à court terme diminue, ce qui est logique sur le plan économique.

Le calcul des dérivées première et seconde du prix par rapport au taux d'intérêt à court terme permet d'exprimer la valeur du paramètre  $\alpha$ , espérance de rendement instantané de l'obligation, en fonction de la variable d'état  $r(t)$ , de la prime de risque  $\lambda$ , et du temps :

$$\begin{aligned} \alpha(t,T) &= r(t) - (T-t) \lambda \\ \Leftrightarrow \alpha(t,T) - r(t) &= - (T-t) \lambda \\ \Leftrightarrow \phi(t,T) &= - (T-t) \lambda \end{aligned} \quad (26)$$

La prime de terme  $\phi(t,T)$  est positive lorsque le prix unitaire du risque de taux d'intérêt  $\lambda$  est inférieur à zéro, et augmente dans ce cas linéairement avec la maturité de l'obligation. Elle devient donc infinie lorsque  $T$  tend vers l'infini.

L'écart-type instantané  $\delta$ , second paramètre permettant de représenter l'évolution dans le temps du rendement de l'obligation, peut également être exprimé en fonction du prix unitaire du risque  $\lambda$  et de l'écart-type instantané du taux d'intérêt à court terme,  $\sigma$  :

$$\delta(t,T) = - (T-t) \sigma \quad (27)$$

Lorsque l'obligation parvient à sa date de remboursement, plus aucune incertitude ne subsiste quant à l'évolution future de son prix :  $\delta(T,T) = 0$ . Sur ce point, le modèle permet de représenter correctement la réalité. Par contre, lorsque la maturité des obligations tend vers l'infini, la variance du taux de rendement instantané,  $(T - t)^2\sigma^2$ , tend également vers l'infini, ce qui est moins plausible.

Enfin, lorsque  $\lambda = 0$ , la prime de terme  $\phi$  est nulle, alors que le risque associé à la détention d'obligation,  $(T - t)^2\sigma^2$ , est positif. Ce risque n'est donc pas rémunéré, ce qui paraît injustifiable sur le plan économique.

La structure des prix des zéros-coupons, (25) permet de calculer la structure des taux. La relation entre les prix des obligations zéro-coupon  $P(t,T)$  et les taux d'intérêt  $R(t,T)$ <sup>21</sup> est la suivante :

$$R(t,T) = -\frac{\ln[P(t,T)]}{(T-t)}$$

Cette relation permet d'obtenir l'expression de la structure par terme des taux d'intérêt :

$$R(t,T) = r(t) + \frac{(T-t)(\mu - \lambda)}{2} - \frac{(T-t)^2\sigma^2}{6} \quad (28)$$

On peut alors vérifier que la courbe des taux, telle qu'elle est spécifiée par le modèle, a un sens sur le plan économique.

La pente de la courbe des taux est déterminée par la dérivée première de  $R$  par rapport à  $T$  :

$$R_T(t,T) = \frac{(\mu - \lambda)}{2} - \frac{1}{3}(T-t)\sigma^2 \quad (29)$$

Lorsque le rendement instantané anticipé  $\mu$ , est supérieur au prix unitaire du risque  $\lambda$  attaché au taux d'intérêt à court terme, la structure par terme des taux est en cloche ; lorsque  $\mu$  est inférieur ou égal à  $\lambda$ , elle est décroissante.

---

<sup>21</sup>  $R(t,T)$  est le taux de rendement actuariel d'un zéro-coupon de prix  $P(t,T)$ . Il est défini comme le taux d'intérêt qui, appliqué continûment à un investissement de montant  $P(t,T)$  en  $t$ , permet d'obtenir une unité monétaire en  $T$ .



Quelle que soit la forme de la courbe, lorsque la maturité des obligations tend vers l'infini, les taux d'intérêt deviennent négatifs. On a en effet :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = -\infty$$

Sur ce point, le modèle de Merton présente donc une lacune importante. Ce n'est malheureusement pas la seule limite de ce modèle : la volatilité des taux d'intérêt est constante dans le modèle de Merton, alors qu'elle est dans la réalité décroissante avec la maturité, les taux d'intérêt à court terme étant plus volatiles que les taux à long terme.

### ***Le modèle de Vasicek***

En employant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour modéliser le taux court, Vasicek (1977) obtient un modèle plus performant que son prédécesseur. Economiquement, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck peut être interprété de la façon suivante : la variable considérée fluctue aléatoirement autour d'une valeur qui correspond, le plus souvent, à sa moyenne à long terme ; la présence d'une force de rappel assure que la variable, lorsqu'elle s'en éloigne, retourne vers cette valeur<sup>22</sup>.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, appliqué au taux à court terme, s'exprime mathématiquement de la façon suivante :

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dZ(t) \quad (30)$$

$\kappa$ ,  $\sigma$ , et  $\theta$  sont des constantes positives.  $\theta$  est la valeur vers laquelle tend le taux d'intérêt à court terme  $r(t)$  ;  $\kappa$  représente la force de rappel : plus sa valeur est élevée, plus la convergence du processus est rapide.  $\sigma$  est l'écart-type instantané par unité de temps de  $r(t)$ .

L'équation (30) montre que le taux d'intérêt  $r(t)$  est soumis à deux forces contraires : il a tendance à revenir vers une valeur moyenne, représentée par le premier terme de l'équation ; par ailleurs, des mouvements aléatoires peuvent simultanément l'éloigner de cette valeur moyenne. Cette représentation est conforme à la dynamique du taux d'intérêt à court terme observée dans la réalité.

---

<sup>22</sup> Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est également qualifié de « marche aléatoire élastique ».

Lorsqu'on utilise ce processus, l'équation de structure par terme des taux devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + [\kappa(\theta - r) - \lambda]P_r - rP + P_t = 0 \quad (31)$$

La solution analytique de cette équation existe, mais elle est plus complexe que dans le modèle de Merton. Sans reprendre le détail des calculs, les principales caractéristiques du modèle sont les suivantes : la prime de terme  $\phi$  est positive quelle que soit l'échéance lorsque le prix de marché du risque de taux d'intérêt,  $\lambda$ , est négatif. Par contre, contrairement à la prime de terme du modèle de Merton, elle converge vers une valeur maximale lorsque la maturité augmente, de même que l'écart-type instantané  $\delta$ . Enfin, là encore, si  $\lambda$  est nul, le marché ne rémunère pas le risque associé à la détention d'une obligation. Seconde caractéristique du modèle de Vasicek, la structure des taux peut adopter les différentes formes observées sur le marché : monotone croissante, monotone décroissante, ou en cloche. Enfin, la volatilité des taux d'intérêt est une fonction décroissante de la maturité, ce qui correspond au phénomène observé dans la réalité.

L'application du modèle de Vasicek est relativement simple, puisqu'il existe une solution analytiquement définie de l'équation de valorisation. De plus, ce modèle offre une représentation satisfaisante de la réalité ; son emploi est donc fréquent. Deux limites doivent cependant être soulignées : en premier lieu, le taux à long terme converge vers une valeur indépendante de la forme et du niveau de la courbe des rendements ; ensuite, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck n'exclut pas la possibilité d'apparition de taux d'intérêt négatifs. Pour pallier cet inconvénient, Cox, Ingersoll et Ross (1985) utilisent un processus racine carrée, dans lequel la variance du taux d'intérêt à court terme dépend du niveau du taux d'intérêt à court terme.

### ***Limites des modèles monofactoriels<sup>23</sup>***

Les modèles monofactoriels sont assez largement employés pour valoriser des actifs dérivés : leur mise en oeuvre est en effet simple et rapide. Si leur portée

---

<sup>23</sup> Critique des modèles monofactoriels : voir R. Gibson, 1992 : « Obligations et clauses optionnelles », PUF.

empirique est importante, ces modèles présentent cependant une limite théorique conséquente : le fait de ne retenir que le taux d'intérêt à court terme comme variable explicative du comportement des prix des obligations implique de considérer les rendements des obligations de différentes maturités comme parfaitement corrélés. Ceci signifie que le taux d'intérêt à court terme et un seul zéro-coupon suffisent à décrire la totalité de la structure des taux, et qu'on ne prend pas en considération la possibilité que la courbe des rendements décrive des mouvements autres que des translations. Pour représenter les rotations de courbe et les inversions de pente rencontrées dans la réalité, il faut introduire au moins un autre facteur sous-jacent dans l'analyse.

### 2.1.1.c. Modèles à deux facteurs

Dans le cas des modèles à deux facteurs, ont principalement été retenus comme seconde variable d'état le taux à long terme (Brennan et Schwartz, 1979 et 1982), le taux d'inflation (Richard, 1978), les variations non anticipées du différentiel de taux (Schaefer et Schwartz, 1984) et la volatilité des taux courts (Frachot et Lesne, 1993). Le modèle de Brennan et Schwartz peut être utilisé comme exemple représentatif de ce type de modèle.

Brennan et Schwartz justifient leur choix du taux d'intérêt à long terme comme seconde variable d'état en se référant à la théorie des anticipations, selon laquelle le taux à long terme reflète les anticipations du taux à court terme dans leur modèle. En notant  $r(t)$  le taux d'intérêt à court terme et  $l(t)$  le taux d'intérêt à long terme, l'évolution des variables d'état est décrite par les deux équations différentielles stochastiques suivantes :

$$dr(t) = \mu_r(t) dt + \sigma_r(t)dZ_r(t) \quad (32)$$

$$dl(t) = \mu_l(t) dt + \sigma_l(t)dZ_l(t) \quad (33)$$

$\mu_r(t)$  et  $\mu_l(t)$  représentent les tendances instantanées anticipées du taux court et du taux long ;  $\sigma_r^2(t)$  et  $\sigma_l^2(t)$  sont les variances instantanées de ces taux. Le taux à long terme peut être corrélé au taux à court terme : la covariance entre le taux court et le taux long est notée  $\sigma_{rl}(t)$ .

Dans le cadre du modèle monofactoriel, la construction d'un portefeuille localement non risqué nécessitait le recours à deux obligations zéros-coupons dans le cadre du modèle monofactoriel. L'introduction d'une seconde variable d'état entraîne celle d'une troisième obligation zéro-coupon au sein du portefeuille d'arbitrage. La maturité de ces titres est choisie arbitrairement.

En construisant un portefeuille localement non risqué à l'aide de trois zéros-coupons, de telle sorte que la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage soit respectée, on obtient l'équation fondamentale de valorisation suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma_r^2 P_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_l^2 P_{ll} + \sigma_{rl} P_{rl} + (\mu_r - \lambda_r)P_r + (\mu_l - \lambda_l)P_l - rP + P_t = 0$$

La prime de terme  $\phi(t)$  est une combinaison linéaire des primes de risque associées à chaque source d'incertitude, dans des proportions qui dépendent de la sensibilité du prix de l'obligation aux facteurs sous-jacents :

$$\phi(t) = \lambda_r \frac{P_r}{P} + \lambda_l \frac{P_l}{P}$$

$\lambda_r$  est le prix de marché du risque de taux d'intérêt à court terme,  $\lambda_l$  est le prix de marché du risque de taux d'intérêt à long terme.

En prenant en considération une seconde variable d'état, le réalisme du modèle est accru : la corrélation entre les taux de rendement pour différentes échéances n'est plus nécessairement parfaite, comme c'était le cas dans le cadre des modèles à un facteur. Cependant, cette amélioration est obtenue au prix d'une augmentation de la complexité du modèle : trois paramètres<sup>24</sup> suffisaient en effet à spécifier le modèle monofactoriel ; le modèle à deux facteurs en possède six : les variations instantanées anticipées et les volatilités des deux variables, ainsi que les primes de risque qui leur sont associées.

Soulever la question du nombre de facteurs sous-jacents à prendre en considération dans l'analyse revient à buter sur l'une des limites des modèles d'équilibre partiel : rien ne permet en effet de déterminer théoriquement l'identité et

---

<sup>24</sup> Ces trois paramètres sont la variation instantanée anticipée de la variable d'état, la volatilité de la variable d'état, et la prime de risque.

le nombre de facteurs sous-jacents qui doivent être retenus. Les modèles d'équilibre général ont été développés en réponse à ce problème.

Outre le choix du nombre et de la nature des facteurs, la détermination des paramètres du modèle pose un second problème. Là encore, ces paramètres ne sont pas théoriquement définis. Ils doivent être estimés empiriquement, ce qui n'est pas toujours possible et peut engendrer des problèmes de cohérence du modèle.

En effet, pour valoriser des obligations à partir d'un modèle d'arbitrage, il est nécessaire de connaître la valeur des paramètres du modèle. Dans le cadre du modèle monofactoriel par exemple, ces paramètres sont au nombre de trois : le rendement instantané anticipé,  $\mu$ , l'écart-type instantané par unité de temps,  $\sigma$ , et la prime de risque  $\lambda$ . Les deux premiers peuvent éventuellement être estimés statistiquement, à condition que le facteur sous-jacent considéré soit observable<sup>25</sup>. Par contre, pour obtenir  $\lambda$ , une procédure d'estimation plus élaborée doit être employée : la procédure d'inversion. Celle-ci revient à extraire, à partir de la comparaison entre les prix théoriques et les prix empiriques des obligations, le prix de marché du risque associé à un facteur de la façon suivante : les prix empiriques des obligations peuvent être observés sur le marché ; par ailleurs, la tendance et la volatilité des facteurs sous-jacents ( $\mu$  et  $\sigma$ ) étant estimées, il est possible de calculer des prix théoriques des obligations pour un prix de marché du risque donné. Le prix de marché du risque optimal est celui qui permet d'égaliser prix théoriques et prix empiriques. Cette procédure d'inversion n'est cependant pas toujours réalisable, compte tenu de la forme non linéaire des équations de valorisation.

Outre cette difficulté d'ordre pratique, les modèles d'équilibre présentent des limites théoriques : l'examen de la procédure d'inversion montre en effet que les primes de risques, dans ces modèles, sont sensibles au choix de la dynamique exogène des facteurs sous-jacents. Les primes de risque obtenues peuvent donc aboutir à la construction d'un modèle ne respectant pas la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage. La méthode d'évaluation « risque-neutre », qualifiée également d'approche probabiliste, permet de pallier ces inconvénients.

---

<sup>25</sup> On suppose dans ce cas que les paramètres anticipés peuvent être identifiés aux valeurs observées. Ce point est détaillé en conclusion de cette seconde partie.

## ANNEXE 3 : SOLUTION ANALYTIQUE DU MODELE DE BRENNAN ET SCHWARTZ (BG)

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 F_{ss} + (r - c)SF_s - F_\tau = 0 \quad (\text{BG4})$$

sous la condition aux bornes associée :

$$F(S, T, T) = S(T) \quad (\text{BG5})$$

Pour résoudre cette équation, on cherche à obtenir une solution de type Feynman-Kac. Cette solution est obtenue à partir de l'expression en univers risque-neutre du processus de l'actif sous-jacent.

- La dynamique de l'unique variable d'état, dans le modèle BS, est la suivante :

$$dS = \mu S dt + \sigma_s S dz \quad (\text{BG1})$$

- où
- S est le prix au comptant,
  - $\mu$  est le rendement instantané anticipé pour la variable S,
  - dz est l'incrément d'un mouvement brownien,
  - $\sigma_s$  est la volatilité du prix au comptant.

L'expression de cette dynamique, sous la mesure de martingale équivalente Q, supposée unique, est la suivante :

$$dS = (r - c)S dt + \sigma_s S dz^*$$

- où
- r est le taux à court terme, supposé constant
  - c est le *convenience yield*
  - $z^*$  est le mouvement brownien standard sous la probabilité Q.

A partir du processus de prix au comptant exprimé en univers risque-neutre, il est possible d'utiliser une solution de type Feynman-Kac pour résoudre l'équation (BG4). En l'absence d'opportunité d'arbitrage, sous la probabilité Q, le prix à terme  $F(S,t,T)$  devient l'espérance à la date t du prix au comptant en T.<sup>1</sup> Ce changement de numéraire permet de simplifier la résolution de l'équation aux dérivées partielles.

La solution recherchée s'écrit donc :

$$F(S,t,T) = E_t^Q[S(T)]$$

Le prix  $F(S, t, T)$  est l'anticipation, sous la probabilité risque-neutre Q et compte tenu de l'information disponible à la date t, du prix au comptant à l'échéance T.

En posant  $G = \ln S$ , on peut écrire :

$$F(S,t,T) = E_t^Q[e^{G(T)}] \quad (\text{BG7})$$

G a une distribution normale, et l'équation (BG7) est la fonction génératrice de moments d'une distribution normale :

$$F(S,t,T) = E_t^Q[e^{G(T)}] = \exp\left(E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}_t[G(T)]\right) \quad (\text{BG8})$$

L'application du lemme d'Itô à la relation  $G = \ln S$  permet d'obtenir la dynamique de G :

$$dG = G_t dt + G_s dS + \frac{1}{2} G_{ss} (dS)^2$$

$$\text{Avec: } G_s = 1/S$$

$$G_{ss} = -1/S^2$$

$$\Rightarrow dG = G_s [\mu S dt + \sigma_s S dz] + \frac{1}{2} G_{ss} [\sigma_s^2 S^2 dt]$$

$$\Rightarrow dG = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_s^2\right) dt + \sigma_s dz$$

Ce qui peut s'écrire, en univers risque neutre :

$$dG = \left(r - c - \frac{1}{2} \sigma_s^2\right) dt + \sigma_s dz^* \quad (\text{BG9})$$

---

<sup>1</sup> Le théorème de Feynman-Kac et les conditions nécessaires de régularités sont exposées dans Duffie, 1992.



G suit un mouvement brownien généralisé, de tendance  $\left(r - c - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)$  ; son coefficient de diffusion est  $\sigma_s$ .

Rechercher une solution de type Feynman-Kac conduit à calculer l'espérance et la variance de  $G(T)$ . En intégrant  $dG$  entre  $t$  et  $T$ , on obtient :

$$G(T) = G(t) + r\tau - c\tau - \frac{1}{2}\sigma_s^2\tau + \sigma\int_t^T dz^*(y) \quad (\text{BG10})$$

On peut en déduire immédiatement les valeurs de l'espérance et de la variance de  $G$  :

$$E_t^Q[G(T)] = G(t) + \left(r - c - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau \quad (\text{BG11})$$

$$\text{Var}[G(T)] = \sigma_s^2\tau$$

En supposant que le taux d'intérêt sans risque est déterministe, le prix à terme (ou prix forward, puisque le taux d'intérêt est constant dans ce modèle) est défini par l'équation (BG8), et la solution du modèle monofactoriel est donc :

$$F(S, t, T) = Se^{(r-c)\tau} \quad (\text{BG6})$$

La vérification de la validité de cette solution peut être réalisée très rapidement. La solution (BG6) est qualifiée de solution probabiliste de l'équation (BG4).

D'après cette relation, le prix à terme sera supérieur au prix au comptant quelle que soit la maturité considérée si  $r > c$ . Dans le cas inverse, le prix à terme restera inférieur au prix au comptant et la structure par terme sera en déport.

## ANNEXE 4 : SOLUTION ANALYTIQUE DU MODELE DE SCHWARTZ (MR)

La première partie de cette annexe est consacrée à la résolution analytique de l'équation aux dérivées partielles du modèle MR, la seconde partie à l'analyse de la volatilité des rendements des prix à terme théoriques obtenus à partir de ce modèle.

### 1. RESOLUTION DE L'EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\frac{1}{2} F_{SS} \sigma_S^2 S^2 + \frac{1}{2} F_{CC} \sigma_C^2 + \rho \sigma_S \sigma_C S F_{SC} + S F_S (r - C) + F_C [\kappa(\alpha - C) - \lambda] - F_\tau = 0$$

(MR3)

$$\text{avec : } F(S, C, T, T) = S(T) \quad (\text{MR4})$$

Comme pour le modèle BG, pour résoudre cette équation, on cherche à obtenir une solution de type Feynman-Kac. A partir de la dynamique des états, en univers risque-neutre, on peut exprimer le prix à terme  $F(S, C, t, T)$  comme l'espérance, à la date  $t$  et sous la probabilité  $Q$ , du prix au comptant en  $T$  :

$$F(S, C, t, T) = E_t^Q[S(T)]$$

Initialement, la dynamique des variables d'état est la suivante dans le modèle MR :

$$\begin{cases} dS = (\mu - C)Sdt + \sigma_S S dz_S \\ dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_C dz_C \end{cases} \quad (\text{MR1})$$

$$\text{Avec : } E[dz_S \times dz_C] = \rho dt$$

$$\kappa, \sigma_S, \sigma_C > 0$$

- où :
- S est le prix au comptant,
  - C est le *convenience yield* associé aux stocks,
  - $\mu$  est le rendement instantané anticipé pour la variable S,
  - $\alpha$  est la moyenne à long terme de C,
  - $\kappa$  est la force de rappel agissant sur C vers  $\alpha$ ,
  - $\sigma_S$  est la volatilité du prix au comptant,
  - $\sigma_C$  est la volatilité du *convenience yield*,
  - $dz_S$  est l'incrément du mouvement brownien associé au prix au comptant,
  - $dz_C$  est l'incrément du mouvement brownien associé au *convenience yield*,
  - $\rho$  est le coefficient de corrélation liant les deux mouvements browniens.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, cette dynamique des états, sous la probabilité risque-neutre Q, est la suivante :

$$\begin{cases} dS = (r - C)Sdt + \sigma_S S dz_S^* \\ dC = [k(\alpha - C) - \lambda]dt + \sigma_C dz_C^* \end{cases} \quad (\text{MR6})$$

Avec :

$$E[dz_S^* \times dz_C^*] = \rho dt$$

- où :
- r est le taux d'intérêt à court terme, supposé constant
  - $z_S^*$  et  $z_C^*$  sont les mouvements browniens standards associés respectivement à S et à C sous la probabilité Q.

Comme dans le modèle BG, on pose :  $G = \ln S$

La dynamique de G est obtenue en appliquant le lemme d'Itô à cette relation :

$$dG = G_t dt + G_S dS + \frac{1}{2} G_{SS} (dS)^2$$

Avec :  $G_S = 1/S$

$$G_{SS} = -1/S^2$$

$$\Rightarrow dG = G_S [S(r - C)dt + \sigma_S S dz_S^*] + \frac{1}{2} G_{SS} [\sigma_S^2 S^2 dt]$$

$$\Leftrightarrow dG = \left( r - C - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) dt + \sigma_S dz_S^* \quad (\text{MR7})$$

En intégrant l'équation (MR7) entre  $t$  et  $T$ , on obtient  $G(T)$  :

$$G(T) = G(t) - 0.5\sigma_s^2(T-t) + \int_t^T r(v)dv - \int_t^T C(v)dv + \sigma_s \int_t^T dz_s^*(y)$$

Dans ce modèle, on fait l'hypothèse que les taux d'intérêt sont constants. On a donc :  $r(v) = r$ . Par ailleurs, on pose :  $(T-t) = \tau$

$$\Rightarrow G(T) = G(t) - 0.5\tau\sigma_s^2 + r\tau - \int_t^T C(v)dv + \sigma_s \int_t^T dz_s^*(y) \quad (\text{MR8})$$

La solution de type Feynman-Kac conduit à calculer l'espérance et la variance de  $G(T)$ , afin d'en déduire celles de  $S(T)$ .

### 1.1. CALCUL DE L'ESPERANCE DE G :

La valeur de l'espérance de  $G$ , sous la probabilité  $Q$ , est la suivante :

$$E_t^Q[G(T)] = G(t) - 0.5\tau\sigma_s^2 + r\tau - \int_t^T E_t^Q[C(v)]dv \quad (\text{MR9})$$

Pour résoudre l'équation (MR9), il faut connaître la solution de l'équation différentielle stochastique exprimant la dynamique de  $C$  en univers risque-neutre.

### Résolution de l'équation (MR6-2) par la méthode de la variation de la constante :<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> La méthode de la variation de la constante permet de résoudre des équations du type :

$$\frac{dX}{dt} = -aX + b(t)$$

- On commence par déterminer la solution en ignorant le dernier membre de cette équation. Ce second membre sera réintroduit ensuite.

$$\frac{dX}{dt} = -aX \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = -aX \Leftrightarrow \ln X(t) = -at + A, \text{ (avec } A \text{ constante)} \Leftrightarrow X(t) = A e^{-at}$$

- Considérons que la constante devient une fonction du temps :  $A \rightarrow A(t)$

$$\Rightarrow X(t) = A(t) e^{-at} \Leftrightarrow dX(t)/dt = A_t e^{-at} - [a A(t) e^{-at}]$$

Par identification avec l'équation sans second membre, en considérant dans un premier temps le second membre comme une constante, on peut écrire :  $A_t e^{-at} - [a A(t) e^{-at}] = -a A(t) e^{-at} + b$

$$\Leftrightarrow A_t e^{-at} = b \text{ car } X(t) = A(t) e^{-at}$$

$$\Leftrightarrow A_t = b e^{at} \Leftrightarrow \text{si } b \text{ est indépendant de } t, A(t) = (b/a) e^{at} + B \text{ (avec } B \text{ constante).}$$

$$\Rightarrow X(t) = \left( \frac{b}{a} e^{at} + B \right) e^{-at} \Leftrightarrow X(t) = (b/a) + B e^{-at}$$

$$dC = [\kappa(\alpha - C) - \lambda]dt + \sigma_C dz_C^*$$

Soit  $\hat{\alpha}$  la moyenne de long terme du *convenience yield*, ajustée du risque :

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

$$\Rightarrow dC = \kappa(\hat{\alpha} - C)dt + \sigma_C dz_C^*$$

sachant que ( $d\hat{\alpha}=0$ ),

$$\Rightarrow d(C - \hat{\alpha}) = \kappa(\hat{\alpha} - C)dt + \sigma_C dz_C^*$$

• Détermination de la solution sans second membre :

$$d(C - \hat{\alpha}) = -\kappa(C - \hat{\alpha})dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(C - \hat{\alpha})}{C - \hat{\alpha}} = -\kappa dt$$

$$\Leftrightarrow \ln(C - \hat{\alpha}) = -\kappa t + A \quad (\text{avec } A \text{ constante})$$

$$\Leftrightarrow C - \hat{\alpha} = Ae^{-\kappa t}$$

Considérons que la constante est une fonction du temps :  $A \rightarrow A(t)$

$$C - \hat{\alpha} = A(t)e^{-\kappa t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(C - \hat{\alpha})}{dt} = A_t e^{-\kappa t} - [A(t) \times (\kappa e^{-\kappa t})]$$

Par identification avec l'équation (MR6-2), on peut écrire :

• Considérons que le second membre varie en fonction de  $t$  :  $b \rightarrow b(t)$

$$A_t = b e^{at} \Rightarrow A(t) = \int_t^T b(v) e^{av} dv + B \Leftrightarrow X(t) = \left[ \int_t^T b(v) e^{av} dv + B \right] e^{-at}$$

Les propriétés du calcul stochastique (en particulier le fait que  $(dz \times dz) = dt$ ) permettent d'appliquer cette méthode pour résoudre l'équation (MR6-2).

$$\left(A_t e^{-\kappa t} - A(t) \times (\kappa e^{-\kappa t})\right) dt = -\kappa(C - \hat{\alpha}) dt + \sigma_C dz_C^* \quad \text{car } \frac{dz_C^*}{dt} = dz_C^*$$

$$\Leftrightarrow A_t e^{-\kappa t} dt = \sigma_C dz_C^*$$

$$\Leftrightarrow A(t) = B + \int_{t_0}^t \sigma_C e^{\kappa s} dz_C^*(s)$$

$$\text{or } C(t) - \hat{\alpha} = A(t) e^{-\kappa t}$$

$$\Leftrightarrow C(t) - \hat{\alpha} = \left( \int_{t_0}^t \sigma_C e^{\kappa s} dz_C^*(s) + B \right) e^{-\kappa t}$$

$$\Leftrightarrow e^{\kappa t} [C(t) - \hat{\alpha}] = \int_{t_0}^t \sigma_C e^{\kappa s} dz_C^*(s) + B$$

$$\Leftrightarrow e^{\kappa v} [C(v) - \hat{\alpha}] = \int_{t_0}^v \sigma_C e^{\kappa s} dz_C^*(s) + B$$

La différence entre ces deux équations permet d'obtenir  $C(v)$  :

$$\Leftrightarrow C(v) = \hat{\alpha} + [C(t) - \hat{\alpha}] e^{-\kappa(v-t)} + e^{-\kappa v} \sigma_C \int_t^v e^{\kappa s} dz_C^*(s) \quad (\text{MR10})$$

$$\Rightarrow E_t^Q[C(v)] = \hat{\alpha} + [C(t) - \hat{\alpha}] e^{-\kappa(v-t)} \quad (\text{MR11})$$

On réintègre cette solution dans l'équation (MR9) :

$$E_t^Q[G(T)] = G(t) + r\tau - 0.5\sigma_S^2\tau - \int_t^T E_t[C(v)] dv$$

$$\Leftrightarrow E_t^Q[G(T)] = G(t) + r\tau - 0.5\sigma_S^2\tau - \int_t^T \left( \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) e^{-\kappa(v-t)} \right) dv$$

$$\Leftrightarrow E_t^Q[G(T)] = G(t) + r\tau - 0.5\sigma_s^2\tau - \hat{\alpha}\tau - \left[ (C(t) - \hat{\alpha}) \int_t^T e^{-\kappa(v-t)} dv \right]$$

En posant :  $H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$ , on obtient :

$$\Leftrightarrow \boxed{E_t^Q[G(T)] = G(t) + r\tau - 0.5\sigma_s^2\tau - \hat{\alpha}\tau - [(C(t) - \hat{\alpha}) \times H]} \quad (\text{MR12})$$

## 1.2. CALCUL DE LA VARIANCE DE G :

$$\text{var}[G(T)] = \text{var}\left[\int_t^T C(v)dv\right] + \sigma_s^2\tau - 2\text{cov}\left[\int_t^T C(v)dv, \sigma_s \int_t^T dz_s^*(y)\right]$$

car  $\text{var}[dz] = dt = \tau$

En remplaçant  $C(v)$  par la partie aléatoire de l'équation (B11), on obtient :

$$\text{var}[G(T)] = \text{var}\left[\int_t^T \sigma_c e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa s} dz_c^*(s)\right] + \sigma_s^2\tau - 2\text{cov}\left[\int_t^T \sigma_c e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa s} dz_c^*(s), \sigma_s \int_t^T dz_s^*(y)\right]$$

**Calcul du premier terme de la variance de G :**  $\text{var}\left[\int_t^T \sigma_c e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa s} dz_c^*(s)\right]$

$$A = \text{var}\left[\int_t^T \sigma_c e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa s} dz_c^*(s)\right]$$

$$A = \left\langle \int_t^T dv_1 \int_t^T dv_2 \left( \sigma_c e^{-\kappa(v_1+v_2)} \times \int_t^{v_1} e^{\kappa s_1} dz_c^*(s_1) \times \int_t^{v_2} e^{\kappa s_2} dz_c^*(s_2) \right) \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow A = \left\langle \int_t^T dv_1 \int_t^T dv_2 \left( \sigma_C e^{-\kappa(v_1+v_2)} \times \int_t^{\min(v_1, v_2)} e^{2\kappa s} ds \right) \right\rangle$$

$$\text{car } \int_t^{v_1} f(s_1) dz(s_1) \times \int_t^{v_2} f(s_2) dz(s_2) = \int_t^{\min(v_1, v_2)} f^2(s) ds$$

$\Rightarrow$

$$A = \left\langle \int_t^T dv_1 \left\{ \left( \int_t^{v_1} \sigma_C e^{-\kappa(v_1+v_2)} dv_2 \right) \times \frac{1}{2\kappa} \times [e^{2\kappa v_2} - e^{2\kappa t}] + \left( \int_{v_1}^T \sigma_C e^{-\kappa(v_1+v_2)} dv_2 \right) \times \frac{1}{2\kappa} \times [e^{2\kappa v_1} - e^{2\kappa t}] \right\} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sigma_C^2}{2\kappa^2} \int_t^T dv_1 \left\{ \left( \int_t^{v_1} (e^{\kappa(v_2-v_1)} - e^{\kappa(2t-v_1-v_2)}) dv_2 \right) + \left( \int_{v_1}^T (e^{\kappa(v_1-v_2)} - e^{\kappa(2t-v_1-v_2)}) dv_2 \right) \right\}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sigma_C^2}{2\kappa^2} \int_t^T dv_1 [1 - e^{\kappa(t-v_1)} + e^{2\kappa(t-v_1)} - e^{\kappa(t-v_1)} - e^{\kappa(v_1-T)} + 1 + e^{\kappa(2t-T-v_1)} - e^{2\kappa(t-v_1)}]$$

$$\Leftrightarrow A = \sigma_C^2 \times \left( \frac{\tau}{\kappa^2} - \frac{1}{\kappa^3} (e^{-\kappa\tau} - 1) - \frac{1}{2\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau}) + \frac{1}{2\kappa^3} (e^{-2\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau}) \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sigma_C^2 \tau}{\kappa^2} - \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} H - \frac{\sigma_C^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau} + e^{-2\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau})$$

$$\Leftrightarrow A = - \left[ (H - \tau) \times \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} \right] - \left[ \frac{\sigma_C^2 H^2}{2\kappa} \right] \quad \text{Avec : } H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

**Calcul du second terme de la variance de G :**

$$B = \text{cov} \left[ \int_t^T \sigma_C e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa s} dz_C^*(s), \sigma_S \int_t^T dz_S^*(y) \right]$$



$$B = \left\langle \int_t^T dv \left( \sigma_C \sigma_S e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_C^*(s) \right) \times \int_t^T dz_S^*(y) \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow B = \sigma_C \sigma_S \int_t^T dv \left( e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_C^*(s) \times \int_t^v dz_S^*(s) \right)$$

avec  $E[dz_S^* \times dz_C^*] = \rho ds$

$$\Leftrightarrow B = (\sigma_S \sigma_C \rho) \times \left[ \int_t^T dv \left\{ e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} ds \right\} \right]$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sigma_S \sigma_C \rho}{\kappa} \times \left[ \int_t^T [1 - e^{\kappa(t-v)}] dv \right]$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sigma_S \sigma_C \rho}{\kappa} \times [\tau - H]$$

La variance de G(T) s'écrit donc :

$$\boxed{\text{var}[G(T)] = \left( -(H - \tau) \times \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_C^2 H^2}{2\kappa} \right) + \sigma_S^2 \tau - 2 \left( \frac{\rho \sigma_S \sigma_C}{\kappa} \times (\tau - H) \right)} \quad (\text{MR13})$$

Si le prix à terme  $F(S, C, t, T)$  est l'espérance sous la probabilité risque-neutre, de  $S(T)$ , on peut poser :

$$F(S, C, t, T) = E_t[S(T)] = E_t^Q[e^{G(T)}]$$

$\Rightarrow$

$$F(S, C, t, T) = E_t^Q[S(T)] = e^{E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}[G(T)]}$$

Le résultat final est obtenu en remplaçant l'espérance et la variance de G(T) par leur valeur :

$$\boxed{E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}[G(T)] = \ln S(t) + r\tau - \hat{\alpha}\tau - \frac{1}{2}\sigma_s^2\tau - H(C(t) - \hat{\alpha}) - \frac{1}{2}\left[(H - \tau)\frac{\sigma_c^2}{\kappa^2}\right] - \frac{1}{4}\frac{\sigma_c^2 H^2}{\kappa} + \frac{1}{2}\sigma_s^2\tau - \frac{\rho\sigma_s\sigma_c}{\kappa}(\tau - H)}$$

$\Rightarrow$

$$E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}[G(T)] = \ln S(t) + (H - \tau) \times \left[ \hat{\alpha} - \frac{\sigma_c^2}{2\kappa^2} + \frac{\rho\sigma_s\sigma_c}{\kappa} \right] - HC(t) - \frac{\sigma_c^2 H^2}{4\kappa} + r\tau$$

$\Rightarrow$

$$e^{E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}[G(T)]} = S(t) \times \exp\left[(H - \tau) \times \left[ \frac{\kappa^2 \hat{\alpha} - 0.5\sigma_c^2 + \kappa\rho\sigma_s\sigma_c}{\kappa^2} \right] - \frac{\sigma_c^2 H^2}{4\kappa}\right] \times \exp(-H \times C(t)) \times \exp(r\tau)$$

$\Leftrightarrow$

$$F(S, C, t, T) = S(t) \times A(\tau) \times e^{-HC(t)} \times e^{r\tau}$$

Sachant que pour une obligation zéro-coupon de prix  $P(T, T) = 1$  à l'échéance on a :

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) = \exp(-r\tau)$$

La solution du modèle MR est :

$$\boxed{F(S, C, t, T) = S(t) \times A(\tau) \times e^{-HC(t)} \times \frac{1}{P(t, T)}} \quad (\text{MR5bis})$$

Avec :

$$H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

$$A(\tau) = \exp\left[\frac{(H - \tau) \times [\kappa^2 \hat{\alpha} - 0.5\sigma_c^2 + \kappa\rho\sigma_s\sigma_c]}{\kappa^2} - \frac{\sigma_c^2 H^2}{4\kappa}\right]$$

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

Cette solution peut également être écrite :

$$\boxed{F(S, C, t, T) = S(t) \times \exp[-HC + B(\tau)]} \quad (\text{MR5})$$

Avec :

$$B[\tau] = \left[ \left( r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_S \sigma_C \rho}{\kappa} \right) \times \tau \right] + \left[ \frac{1}{4} \sigma_C^2 \times \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \right] + \left[ \left( \hat{\alpha}\kappa + \sigma_S \sigma_C \rho - \frac{\sigma_C^2}{\kappa} \right) \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa^2} \right) \right]$$

## 2. VOLATILITE DES RENDEMENTS DU PRIX A TERME

La volatilité des rendements du prix à terme est obtenue en appliquant le lemme d'Itô à la solution du modèle MR :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left[ F_t dt + F_S (dS) + F_C (dC) + \frac{1}{2} F_{SS} (dS)^2 + \frac{1}{2} F_{CC} (dC)^2 + F_{SC} (dC dS) \right]$$

Calcul des dérivées partielles :

$$B_\tau = \left( r - \hat{\alpha} + \frac{\sigma_C^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_S \sigma_C \rho}{\kappa} \right) + \frac{\sigma_C^2 e^{-2\kappa\tau}}{2\kappa^2} + \left( \hat{\alpha}\kappa + \sigma_S \sigma_C \rho - \frac{\sigma_C^2}{\kappa} \right) \times \frac{e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

$$F_S = \exp \left[ -C \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B(\tau) \right] = \exp(b)$$

$$F_{SS} = 0$$

$$F_C = -S \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right) \times \exp \left[ -C \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B(\tau) \right] = -S \times H \times \exp(b)$$

$$\text{Avec } H = \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right) \text{ et } b = \left[ -C \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B(\tau) \right]$$

$$F_{CC} = S \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right)^2 \times \exp \left[ -C \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B(\tau) \right] = S \times H^2 \times \exp(b)$$

$$F_{SC} = - \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right) \times \exp \left[ -C \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B(\tau) \right] = -H \times \exp(b)$$

$$F_t = S \times (-C e^{-\kappa\tau} + B_\tau) \times \exp(b)$$

En remplaçant les dérivées partielles par les calculs obtenus, en utilisant les dynamiques des variables d'état en univers risque-neutre, et en notant que le prix à terme peut s'écrire :

$$F(S, C, t, T) = S \times \exp(b)$$

on obtient :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left[ F_t dt + F_S(dS) + F_C(dC) + \frac{1}{2} F_{SS}(dS)^2 + \frac{1}{2} F_{CC}(dC)^2 + F_{SC}(dC dS) \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{dF}{F} = -C e^{-\kappa\tau} + B_\tau + rdt + \sigma_S dz_S - (H\kappa(\bar{\alpha} - C)dt + H\sigma_C dz_C) + \frac{1}{2} H^2 \sigma_C^2 dt - H\rho\sigma_S\sigma_C dt$$

$$\text{Avec : } H = \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right)$$

En ne retenant que les termes aléatoires de cette expression, on peut écrire :

$$\text{Var} \left( \frac{dF}{F} \right) = \text{Var}(\sigma_S - H\sigma_C)$$

La structure par terme des volatilités est donc :

$$\sigma_F^2(\tau) = \sigma_S^2 + \sigma_C^2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right)^2 - \left[ 2 \times \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \times \rho\sigma_S\sigma_C \right] \quad (\text{MR14})$$

Lorsque l'échéance approche de l'infini, la volatilité des rendements converge vers une valeur fixe :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_F^2 = \sigma_S^2 + \frac{\sigma_C^2}{\kappa^2} - \frac{2\rho\sigma_S\sigma_C}{\kappa} \quad (\text{MR15})$$

## ANNEXE 5 : MODELE ASYMETRIQUE (AS)

Cette annexe présente :

- l'obtention de la dynamique du *convenience yield* pour le modèle asymétrique,
- le calcul de l'espérance et de la variance du *convenience yield*,
- la méthode de Monte-Carlo utilisée pour simuler la dynamique du *convenience yield*,
- la solution semi-analytique du modèle AS, utilisée pour tester les performances de ce modèle (chapitre cinq),
- la façon dont cette solution semi-analytique est manipulée pour réaliser des simulations. Pour obtenir des prix à terme à l'aide du modèle AS, il faut en effet calculer une espérance, par simulations ;
- l'algorithme utilisé pour calculer les prix à terme,
- l'équation aux dérivées partielles associée au modèle AS.

### 1. DYNAMIQUE DU CONVENIENCE YIELD

Le *convenience yield*  $\tilde{C}(t)$ , dans le modèle AS, est exprimé en fonction du *convenience yield*  $C(t)$  du modèle MR :

$$\tilde{C}(t) = (1 - \beta)C(t) + \beta C_1(t) \quad (\text{AS1})$$

Avec: -  $\beta$  : coefficient d'asymétrie

$$- C_1(t) = C_1(t) = e^{C(t)}$$

L'équation (AS1) permet d'écrire :

$$d\tilde{C} = (1 - \beta)dC + \beta dC_1$$

En appliquant le lemme d'Itô à la relation  $C_1(t) = e^{C(t)}$ , il est possible de calculer  $dC_1$ :

$$dC_1 = C_{1t}dt + C_{1c} \times (dC) + \frac{1}{2}C_{1cc} \times (dC)^2$$

$$dC_1 = C_1 \times (\kappa(\alpha - C)dt + \sigma_c dz_c) + \frac{1}{2}C_1 \sigma_c^2 dt$$

$$\Rightarrow dC_1 = C_1 \left( \kappa(\alpha - C) + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \right) dt + \sigma_c C_1 dz_c$$

La dynamique du *convenience yield*, dans le modèle AS, est donc :

$$d\tilde{C} = (1 - \beta)(\kappa(\alpha - C)dt + \sigma_c dz_c) + \beta \left( C_1 \left( \kappa(\alpha - C) + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \right) dt + \sigma_c C_1 dz_c \right)$$

$$\boxed{d\tilde{C} = \left( \kappa(\alpha - C)(1 - \beta(1 - C_1)) + \frac{1}{2}\beta C_1 \sigma_c^2 \right) dt + (1 - \beta(1 - C_1))\sigma_c dz_c} \quad (\text{AS2-2})$$

## 2. ESPERANCE ET VARIANCE DU CONVENIENCE YIELD

L'espérance et la variance du *convenience yield* sont utilisées lors de la simulation de la dynamique de  $\tilde{C}(t)$ . La qualité de l'estimation peut en effet être appréciée en comparant l'espérance et la variance obtenues empiriquement à leur valeur théorique.

$$\text{Soit la relation : } \tilde{C}(t) = (1 - \beta)C(t) + \beta C_1(t) \quad (\text{AS1})$$

Avec:

-  $\beta$  : coefficient d'asymétrie

-  $C_1(t) = e^{C(t)}$

$$- C(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz(s) = A(v) + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz(s) \quad (\text{MR10})$$

### 2.1. CALCUL DE L'ESPERANCE

$$E[\tilde{C}(v)] = E[(1 - \beta)C(v) + \beta C_1(v)] = (1 - \beta)E[C(v)] + \beta E[C_1(v)]$$

$$\text{or, } E_t^Q[C(v)] = \hat{\alpha} + [C(t) - \hat{\alpha}]e^{-\kappa(v-t)} \quad (\text{MR11})$$

Posons :  $E[C(v)] = A(v)$

$$\begin{aligned}
 E[C_1(v)] &= \exp(A(v)) \times E \left[ \exp \left( \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right) \right] \\
 &= \exp(A(v)) \times \exp \left( E \left[ \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right] + \frac{1}{2} \text{Var} \left[ \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right] \right) \\
 &= \exp(A(v)) \times \exp \left( \frac{1}{2} \text{Var} \left[ \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right] \right) \\
 &= \exp(A(v)) \times \exp \left( \frac{\sigma_c^2}{2} e^{-2\kappa v} \text{Var} \left[ \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right] \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Var} \left[ \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right] = E \left[ \int_t^v \int_t^v e^{\kappa(s_1+s_2)} dz_c(s_1) dz_c(s_2) \right] - \left( E \left[ \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right] \right)^2$$

$$\text{Var} \left[ \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right] = \int_t^v e^{2\kappa s} ds = \frac{1}{2\kappa} (e^{2\kappa v} - e^{2\kappa t})$$

$$E[C_1(v)] = \exp \left( A(v) + \frac{\sigma_c^2}{4\kappa} \times (1 - e^{-2\kappa(v-t)}) \right)$$

$$E[\tilde{C}(v)] = (1 - \beta)A(v) + \beta \exp \left( A(v) + \frac{\sigma_c^2}{4\kappa} \times (1 - e^{-2\kappa(v-t)}) \right)$$

## 2.2. CALCUL DE LA VARIANCE

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\tilde{C}(v)] &= \text{Var}[(1 - \beta)C(v) + \beta C_1(v)] \\
 &= (1 - \beta)^2 \text{Var}[C(v)] + \beta^2 \text{Var}[C_1(v)] + 2\beta(1 - \beta) \text{Cov}[C(v), C_1(v)]
 \end{aligned}$$

### 2.2.1. Variance de $C_1(v)$

$$\text{Var}[C_1(v)] = E \left[ \left( \exp \left( A(v) + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right) \right)^2 \right] - \left( E \left[ \exp \left( A(v) + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s) \right) \right] \right)^2$$

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\exp\left(A(v) + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s)\right)\right)^2\right] &= \exp(2A(v)) \times E\left[\exp\left(2\sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s)\right)\right] \\
&= \exp\left(2A(v) + \frac{\sigma_c^2}{\kappa} (1 - e^{-2\kappa(v-t)})\right) \\
\left(E\left[\exp\left(A(v) + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s)\right)\right]\right)^2 &= \exp\left(2A(v) + \frac{\sigma_c^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(v-t)})\right) \\
\boxed{Var[C_1(v)]} &= e^{2A(v)} \times \left(\exp\left(\frac{\sigma_c^2}{\kappa} (1 - e^{-2\kappa(v-t)})\right) - \exp\left(\frac{\sigma_c^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(v-t)})\right)\right)
\end{aligned}$$

### 2.2.2 Covariance

$$Cov[C(v), C_1(v)] = E[C(v) \times \exp(C(v))] - E[C(v)] \times E[\exp(C(v))]$$

Posons  $A(v) = (\hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) \times e^{-\kappa(v-t)})$ ,  $\lambda = \sigma_c e^{-\kappa(v-t)}$ , et  $Y = \int_t^v e^{\kappa s} dz_c(s)$

$$E[C(v)] \times E[\exp(C(v))] = A(v) \times \left(\exp\left(A(v) + \frac{\sigma_c^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(v-t)})\right)\right)$$

$$E[C(v) \times \exp(C(v))] = E[(A(v) + \lambda Y) \times \exp(A(v) + \lambda Y)]$$

$$E[C(v) \times \exp(C(v))] = E[A(v) \exp(A(v) + \lambda Y) + \lambda Y \times \exp(A(v) + \lambda Y)]$$

$$E[C(v) \times \exp(C(v))] = E[A(v) \exp(A(v) + \lambda Y)] + E[\lambda Y \times \exp(A(v) + \lambda Y)]$$

Or  $E[A(v) \exp(A(v) + \lambda Y)] = E[C(v)] \times E[\exp(C(v))]$

Donc :  $Cov[C(v), C_1(v)] = \lambda \times \exp(A(v)) \times E[Y \times \exp(\lambda Y)]$

Soit :  $u(v) = \exp(\lambda Y)$ ,  $\frac{\partial u(v)}{\partial \lambda} = Y \exp(\lambda Y)$

La dérivée de l'espérance de u est égale à l'espérance de la dérivée de u.

$$E[u(v)] = E[\exp(\lambda Y)] = \exp\left(E[\lambda Y] + \frac{1}{2} Var[\lambda Y]\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} Var[Y]\right)$$

$$Var[Y] = \frac{1}{2\kappa} (e^{2\kappa v} - e^{2\kappa t})$$



$$E[u(v)] = \exp\left(\frac{\lambda^2}{4\kappa}(e^{2\kappa v} - e^{2\kappa t})\right)$$

$$\frac{\partial E[u(v)]}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{2\kappa}(e^{2\kappa v} - e^{2\kappa t})\exp\left(\frac{\lambda^2}{4\kappa}(e^{2\kappa v} - e^{2\kappa t})\right)$$

$$Cov[C(v), C_1(v)] = \frac{\lambda^2}{2\kappa}(e^{2\kappa v} - e^{2\kappa t}) \times \exp(A(v)) \times \exp\left(\frac{\lambda^2}{4\kappa}(e^{2\kappa v} - e^{2\kappa t})\right)$$

$$Cov[C(v), C_1(v)] = \frac{\sigma_c^2}{2\kappa}(1 - e^{2\kappa(v-t)}) \times \exp\left(A(v) + \frac{\sigma_c^2}{4\kappa}(1 - e^{2\kappa(v-t)})\right)$$

$$\begin{aligned} Var[\tilde{C}(v)] &= \beta^2 e^{2A(v)} \times \left( \exp\left(\frac{\sigma_c^2}{\kappa}(1 - e^{2\kappa(v-t)})\right) - \exp\left(\frac{\sigma_c^2}{2\kappa}(1 - e^{2\kappa(v-t)})\right) \right) \\ &+ \exp\left(A(v) + \frac{\sigma_c^2}{4\kappa}(1 - e^{2\kappa(v-t)})\right) \times \left( (1 - \beta)^2 + 2\beta(1 - \beta)\frac{\sigma_c^2}{2\kappa}(1 - e^{2\kappa(v-t)}) \right) \end{aligned}$$

### 3. SIMULATION MONTE-CARLO

Une méthode Monte-Carlo est une méthode numérique utilisant le tirage de nombre aléatoire. Les principes de cette méthode sont présentés avant d'expliquer de quelle façon elle a été employée pour simuler la dynamique du *convenience yield* du modèle AS.

#### 3.1. PRESENTATION DE LA METHODE UTILISEE

Soit l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \alpha(X, t)dt + \beta(X, t)dz \\ X_{t_0} = x_0 \end{cases}$$

avec  $t_0 \leq t \leq T$ . Simuler la trajectoire de cette EDS sur l'intervalle  $[t_0, T]$  revient à simuler  $X(t)$  pour  $t \in \Delta$ , où  $\Delta$  est une partition de  $[t_0, T]$ .

Soit  $\Delta = \{t_0 < t_1 < \dots < T\}$ . En choisissant un schéma de discrétisation équidistante, le pas de discrétisation peut être défini de la façon suivante :  $h = t_i - t_{i-1}$ .

Dans ce cas :  $t_i = t_0 + ih$ . Le schéma de discrétisation utilisé est l'approximation d'Euler.

Soient  $S = \{S_0, S_1, \dots, S_m\}$  une trajectoire du processus simulé et  $U = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  une série de nombres aléatoires issus d'une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type  $\sqrt{h}$ . Il est alors possible d'écrire :

$$S_{i+1} = S_i + \alpha(S_i, t_i)h + \beta(S_i, t_i)u_i$$

Avec :  $S_0 = x_0$

$$\Rightarrow S_{i+1} - S_i = \alpha(S_i, t_i)(t_{i+1} - t_i) + \beta(S_i, t_i)(z_{t_{i+1}} - z_{t_i})$$

Ce schéma résulte directement de la discrétisation de l'EDS présentée ci-dessus.

Cette discrétisation converge vers l'EDS lorsque le pas de temps  $h$  tend vers zéro.  $z$  étant un processus de Wiener standard,  $E[z_{t_{i+1}} - z_{t_i}] = 0$  et  $V[z_{t_{i+1}} - z_{t_i}] = h$ . Simuler  $(z_{t_{i+1}} - z_{t_i})$  revient à simuler une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance  $h$ .

### 3.2. SIMULATION DE LA DYNAMIQUE DU *CONVENIENCE YIELD*

L'équation différentielle stochastique discrétisée est celle associée au *convenience yield* du modèle MR :  $dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_C dz_C$  (MR2)

A chaque pas de temps, le *convenience yield* du modèle AS est calculé à partir de la relation :  $\tilde{C}(t) = (1 - \beta)C(t) + \beta e^{C(t)}$ .

Le programme permettant de réaliser les simulations est le suivant :

*Initialisation*

$h = 1/800$  ;  $m = 400^1$  ;  $nbtraj = 50000$ ;

$C_0 = \dots$  ;  $\kappa = \dots$  ;  $\alpha = \dots$  ;  $\lambda = \dots$  ;  $\sigma_C = \dots$  ;  $\beta = \dots$  ;  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$  ;

$x_0 = (1 - \beta)C_0 + \beta \exp(C_0)$ ;

*Appel de la procédure de diffusion*

$x = \text{diffuse\_C}(C_0, \&a, \&b, \text{pas}, m, nbtraj, \kappa, \alpha, \sigma_C, \lambda)$ ;

*Procédure permettant de simuler la dynamique de C. Cette procédure fait appel aux deux procédures auxiliaires a et b.*

---

<sup>1</sup>  $m$  est le nombre d'intervalles de temps considéré.

```

proc diffuse_C( C0, a, b, h, m, nbtraj,  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma_C$ ,  $\lambda$ );
    variables locales de la procédure
    local u, x, y, j; local a : proc ; local b : proc ;
    u = rndn(m-1,nbtraj)*sqrt(h);
    y = zeros(m,nbtraj);
    x = zeros(m,nbtraj);
    y[1,.] = C0*ones(1,nbtraj);
    x[1,.] =  $\alpha$ *ones(1,nbtraj);
    j = 2;
    do until j>m;
        y[j,.]=y[j-1,.]+h*a(y[j-1,.])+b(y[j-1,.])*u[j-1,.];
        x[j,.]=(1- $\beta$ )*y[j,.]+ $\beta$ *(exp(y[j,.]));
        j = j+1;
    endo;
    retp(x);
endp;

```

*Procédures auxiliaires retournant la tendance et la volatilité de C*

```

proc (1) =a(y);
    local res1;
    res1 =  $\kappa$ *(  $\hat{\alpha}$  - y);
    retp(res1);
endp;

proc (1) =b(y);
    local res2;
    res2= $\sigma_C$ ;
    retp(res2);
endp;

```

#### 4. SOLUTION SEMI-ANALYTIQUE DU MODELE ASYMETRIQUE

Pour le modèle AS comme pour les précédents, une solution de type Feynman-Kack est recherchée. Cette solution est de la forme :  $F(t, T) = E_t^Q[S(T)]$ . Elle est obtenue, compte tenu du fait que le modèle AS est une forme généralisée du modèle MR, à partir de la solution du modèle MR.

Dans le modèle MR, l'expression analytique de S(T) peut être obtenue à partir de l'équation (MR8) :

$$G(T) = G(t) - 0.5\tau\sigma_s^2 + r\tau - \int_t^T C(v)dv + \sigma_s \int_t^T dz_s^*(y) \quad (\text{MR8})$$

Sachant que  $G = \ln(S)$  :

$$S(T) = S(t) \times \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - \int_t^T C(v)dv\right) \quad (\text{MR8bis})$$

Par ailleurs, l'expression analytique de C est la suivante :

$$C(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \quad (\text{MR10})$$

$$\text{avec } \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

L'équation (MR10) permet de calculer l'intégrale de C :

$$\int_t^T C(v)dv = \int_t^T \left( \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right) dv$$

$\Rightarrow$

$$\int_t^T C(v)dv = \hat{\alpha}\tau + (C(t) - \hat{\alpha})H + \int_t^T \left( \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right) dv$$

$$\text{avec } H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

Cette expression est réintroduite dans l'équation (MR8bis) :

$$S(T) = S(t) \times \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \hat{\alpha}(H - \tau) - HC(t) + \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - \int_t^T \left( \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right) dv\right)$$

L'espérance de  $S(T)$  est alors :

$$E_t^Q[S(T)] = S(t) \times \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \hat{\alpha}(H - \tau) - HC(t)\right) \times E_t^Q\left[\exp\left(\sigma_s \int_t^T dz_s(v) - \int_t^T \left(\sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)\right) dv\right)\right]$$

En remplaçant, dans l'équation (MR8bis),  $C(v)$  par  $\tilde{C}(v)$ , compte tenu de la relation (AS1), on obtient :

$$S(T) = S(t) \times \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \hat{\alpha}(1 - \beta)(H - \tau) - H(1 - \beta)C(t) + \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T \left(\sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)\right) dv - \beta \int_t^T \exp(C(v)) dv\right)$$

Posons :

$$A(\tau) = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \hat{\alpha}(1 - \beta)(H - \tau)\right)$$

$$B(v) = \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)$$

$$D(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)}$$

La solution semi-analytique du modèle AS est alors :

$$F(t, T) = S(t) \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C(t)) E_t^Q\left[\exp\left(\sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T (\exp(B(v) + D(v))) dv\right)\right] \quad (\text{AS5})$$

Cette solution peut également être écrite sous la forme suivante :

$$\boxed{F(t, T) = F_A(t, T) \times E_t^Q[\exp(\sigma_s Z_s(\tau) - (1 - \beta)W - \beta V)]} \quad (\text{AS6})$$

Avec :

$$H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

$$F_A(t, T) = S(t) \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C(t))$$

$$Z_s(\tau) = \int_t^T dz_s(y) = u_s \times \sqrt{\tau}, \text{ où } \tau = T - t, \text{ et } u_s \sim N(0, 1)$$

$$W = \int_t^T B(v) dv = \int_t^T \sigma_c e^{-\kappa v} \left\{ \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right\} dv$$

$$V = \int_t^T \exp(B(v) + D(V)) dv = \int_t^T \exp \left( \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \left\{ \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right\} \right) dv$$

## 5. CALCULS NECESSAIRES A L'OBTENTION DE PRIX A TERMES PAR SIMULATION

La solution du modèle AS étant semi-analytique, l'espérance  $E_t^Q[\exp(\sigma_s Z_s(\tau) - (1-\beta)W - \beta V)]$  est obtenue par simulations. Pour cela, l'expression de l'espérance est transformée : en particulier, les termes V et W sont tous deux des fonctions de B(v). Pour simuler l'espérance, B(v) doit être généré en respectant sa corrélation avec  $Z_s$ . L'expression recherchée est du type :

$$B(v) = \lambda Z_s(\tau) + \mu R(u, \tau) \quad (\text{AS7})$$

où  $R \sim N(0,1)$  est indépendant de  $Z_s(\tau)$ .

Pour cela, la covariance entre B(v) et  $Z_s(\tau)$  est calculée :

$$\text{Cov}(B(v), Z_s(\tau)) = E[B(v) \times Z_s(\tau)] = \left\langle \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \times \int_t^T dz_s(y) \right\rangle$$

Si  $v \leq T$ , alors :

$$\text{Cov}(B(v), Z_s(\tau)) = \rho \sigma_c e^{-\kappa v} \left\langle \int_t^v e^{\kappa y} d(y) \right\rangle = \frac{\rho \sigma_c}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(v-t)})$$

$$\text{Soit } \lambda = \frac{\text{Cov}(B(v), Z_s(\tau))}{\tau}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \text{Var}[B(v) - \lambda Z_s(\tau)] = \text{Var}[B(v)] - \lambda^2 \tau \\ &= \sigma_c^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(v-t)}}{2\kappa} \right) - \frac{\sigma_c^2 \rho^2}{\tau} \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa(v-t)}}{\kappa} \right)^2 \end{aligned}$$

Il est possible de vérifier que R(u,τ) est indépendant de  $Z_s(\tau)$  :

$$\begin{aligned}
E[R(u, \tau) \times Z_s(\tau)] &= \frac{1}{\mu} \times E[(B(v) - \lambda Z_s(\tau)) \times Z_s(\tau)] \\
&= \frac{1}{\mu} \times E[(B(v) \times Z_s(\tau)) - \lambda (Z_s(\tau))^2] \\
&= \frac{1}{\mu} \times E[B(v) \times Z_s(\tau)] - E[\lambda \tau] \\
&= \frac{1}{\mu} \times [\lambda \tau - \lambda \tau] = 0
\end{aligned}$$

La relation (AS7) est donc établie. Pour obtenir le terme W (l'intégrale de B(v)), les points  $R(u_1, \tau), \dots, R(u_n, \tau)$  utilisés pour calculer cette intégrale sont générés. La matrice C est déterminée dans cette optique :

$$C[i, j] = \text{Cov}[R(u_i, \tau), R(u_j, \tau)] = E[R(u_i, \tau) \times R(u_j, \tau)]$$

Avec :

$$\begin{aligned}
R(u_i, \tau) &= \frac{1}{\mu_i} \left( B(u_i) - \frac{E[B(u_i) \times Z_s(\tau)]}{\tau} Z_s(\tau) \right) \\
E[R(u_i, \tau) \times R(u_j, \tau)] &= \frac{1}{\mu_i \mu_j} E \left[ \left( B(u_i) - \frac{E[B(u_i) \times Z_s(\tau)]}{\tau} Z_s(\tau) \right) \times \left( B(u_j) - \frac{E[B(u_j) \times Z_s(\tau)]}{\tau} Z_s(\tau) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\mu_i \mu_j} E \left[ B(u_i) B(u_j) - \frac{B(u_i) E[B(u_j) Z_s(\tau)]}{\tau} Z_s(\tau) - \frac{B(u_j) E[B(u_i) Z_s(\tau)]}{\tau} Z_s(\tau) + \frac{E[B(u_i) Z_s(\tau)] E[B(u_j) Z_s(\tau)]}{\tau} \right] \\
\boxed{C[i, j] = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \times \left[ \text{Cov}(B(u_i), B(u_j)) - \frac{\text{Cov}(B(u_i), Z_s(\tau)) \times \text{Cov}(B(u_j), Z_s(\tau))}{\tau} \right]} & \quad (\text{AS8})
\end{aligned}$$

Avec :

$$\text{Cov}(B(u_i), B(u_j)) = E \left[ \left( \sigma_c e^{-\kappa u_i} \int_t^{u_i} e^{\kappa y} dz_c(y) \right) \times \left( \sigma_c e^{-\kappa u_j} \int_t^{u_j} e^{\kappa y} dz_c(y) \right) \right]$$

Soit :

$$\text{Cov}(B(u_i), B(u_j)) = \frac{\sigma_c^2 e^{-\kappa(u_i + u_j)}}{2\kappa} \times (e^{2\kappa(\min(u_i, u_j))} - e^{2\kappa t})$$

La décomposition de Choleski de la matrice C s'écrit :  $C = LL'$ , où L est triangulaire inférieure, et L' est la transposée de L. Si X est un vecteur de composantes  $X_i$  non

corrélées et gaussiennes, alors :  $R = LX$ . L'équation (AS7) est utilisée pour calculer les termes  $V$  et  $W$ .

## 6. ALGORITHME

Le programme principal calcule la partie analytique de l'équation (AS5) puis fait appel à la procédure *Itération* pour déterminer l'espérance  $E_t^Q[\exp(\sigma_s Z_s(\tau) - (1 - \beta)W - \beta V)]$ . La procédure *Itération* fait elle-même appel à plusieurs procédures auxiliaires permettant de calculer  $B(v)$  (procédures *calculemat*, *calculeveclam*, *calculevecmu* et *calculeB*), puis  $W$  (procédure *calculew*) et enfin  $V$  (procédure *calculev*).

### **\*Initialisation\***

Valeurs initiales des variables d'état :  $S_0, C_0$

Paramètres :  $r, \kappa, \alpha, \lambda, \sigma_s, \sigma_c, \rho, \beta$

Maturité :  $\tau$

Nombre de simulations réalisées pour obtenir l'espérance :  $nbsim$

Degré de précision choisi pour le calcul des intégrales :  $prec = 0,01$

Valeur initiale utilisée pour le calcul des intégrales :  $E^2 = 1^E-12$

### **\*Variables globales\***

$$H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} ; \quad \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa} ;$$

Vecteurs utilisés dans la procédure itération :  $\_Zs, \_ur$

Matrices et vecteurs utilisés dans la procédure *calculeB* :  $mat\_L, \_veclam, \_vecmu$

### **\*Programme principal\***

Calcul de la partie analytique de la solution :

$$A(\tau) = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \hat{\alpha}(1 - \beta)(H - \tau)\right) ;$$

$$f_A = S_0 \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C_0) ;$$

---

<sup>2</sup> Le calcul de la matrice  $mat\_L$  ne peut être réalisé pour la valeur  $\tau = 0$ . Dans ce cas en effet, le vecteur  $\_vecmu$  de la procédure *calculemat* est nul. Or ce dernier apparaît au dénominateur dans le calcul de la matrice  $mat\_L$ .



Appel de la procédure utilisée dans la procédure calculeB : la procédure calculemat calcule une matrice  $mat\_L$  de dimension  $((\tau/prec)+1, (\tau/prec)+1)$ , et deux vecteurs,  $\_veclam$  et  $\_vecmu$ , de dimension  $((\tau/prec)+1, 1)$ .

$\{mat\_L, \_veclam, \_vecmu\} = calculemat(\tau, prec, \kappa, \sigma_c, \rho, E)$  ;

Appel de la procédure itération, qui renvoie un vecteur de dimension (nbsim)

$E = \text{Itération}(\kappa, H, \sigma_s, \sigma_c, \rho, \beta, \tau, nbsim)$  ;

L'espérance  $Em$  est calculée à partir de la moyenne des valeurs de  $E$  :

$Em = \text{meanc}(E)$  ;

Calcul du prix à terme  $F$  :

$F = f_A * Em$  ;

End ;

### **\*Procédures\***

La procédure calculemat permet de calculer la matrice triangulaire inférieure  $mat\_L$ , issue de la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance  $C$  associée à  $R$  :

$$C[i, j] = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \times \left[ \text{Cov}(B(u_i), B(u_j)) - \frac{\text{Cov}(B(u_i), Z_s(\tau)) \times \text{Cov}(B(u_j), Z_s(\tau))}{\tau} \right] \quad (AS8)$$

Dans cette procédure, la matrice  $C$  est appelée  $matcor$ . Comme  $mat\_L$ , elle est de dimension  $((\tau/prec)+1, (\tau/prec)+1)$ . Calculemat renvoie également deux vecteurs nécessaires au calcul de  $B(v)$ ,  $\_veclam$  et  $\_vecmu$ , qui représentent respectivement, en se référant au paragraphe trois de cette annexe :

$$\lambda = \frac{\text{Cov}(B(v), Z_s(\tau))}{\tau},$$

$$\text{Avec} \quad \text{Cov}(B(v), Z_s(\tau)) = \frac{\rho \sigma_c}{\kappa} (1 - e^{-\kappa v})$$

$$\mu = \sqrt{\sigma_c^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa v}}{2\kappa} \right) - \frac{\sigma_c^2 \rho^2}{\tau} \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa v}}{\kappa} \right)^2}$$

Ces trois éléments sont ensuite utilisés dans la procédure calculeB.

Pour obtenir la matrice  $C$  ( $matcor$ ), il est également nécessaire de calculer la matrice de covariance entre  $B(u_i)$  et  $B(u_j)$ , appelée  $matcov$  dans cette procédure :

$$\text{Cov}(B(u_i), B(u_j)) = \frac{\sigma_c^2 e^{-\kappa(u_i + u_j)}}{2\kappa} \times (e^{2\kappa \min(u_i, u_j)} - 1)$$

**PROC(3) = calculemat( $\tau$ , prec,  $\kappa$ ,  $\rho$ ,  $\sigma_c$ , E);**

*Variables locales de la procédure*

local veclam, vecmu, matcor, matcov, veccov, L;

local compteur, tau, i, min, comp1, comp2;

*Initialisation des matrices et vecteurs utilisés dans la procédure :*

veclam = zeros((( $\tau$ /prec)+1),1);

veccov = zeros((( $\tau$ /prec)+1),1);

vecmu = zeros((( $\tau$ /prec)+1),1);

matcor = zeros((( $\tau$ /prec)+1), (( $\tau$ /prec)+1));

matcov = zeros((( $\tau$ /prec)+1), (( $\tau$ /prec)+1));

min = zeros(2,1);

compteur = { };

*Création d'une séquence de nombres, dont le premier est de valeur 1, le dernier de valeur tau/prec, avec une incrémentation de 1 :*

compteur = seqa (1, 1, tau/prec);

$$\text{comp1} = \frac{1}{\kappa} \times \sigma_c \times \rho ; \quad \text{comp2} = \frac{\sigma_c^2}{2\kappa} ;$$

*Calcul du premier élément de veccov : veccov = comp1\*(1-exp(- $\kappa$ \*E\*prec));*

*Les autres éléments de veccov sont ajoutés au premier :*

veccov = veccov | comp1\*(1-exp(- $\kappa$ \*compteur\*prec));

veclam = (1/ $\tau$ )\*veccov;

*Calcul du premier élément de vecmu :*

vecmu = sqrt((comp2\*(1-exp(-2\* $\kappa$ \*(E\*prec)))) - ( $\tau$ \*veclam[1]^2));

tau = tau\*((veclam[2 : (tau/prec)+1]^2));

*Les autres éléments de vecmu sont ajoutés au premier :*

vecmu = vecmu | sqrt((comp2\*(1-exp(-2\* $\kappa$ \*(compteur\*prec)))) - (tau));

*Calcul du premier élément de matcov et de matcor :*

```

matcov[1,1] = comp2*exp(-κ*2*E*prec)*(exp(2*κ*E*prec)-1);
matcor[1,1] = (1/(vecmu[1]^2)).*(matcov[1,1]-((veccov[1]^2)/τ));

i = 2;
do until i > ((τ/prec)+1);
    min = seqa (2, 1, i-1) | (i*ones((τ/prec) - i +2, 1);
    min = min[1 : (τ/prec)];
    matcov[i,2 : (τ/prec)+1] =
        comp2*exp(-κ*(((i-1)+compteuri)*prec))*(exp(2*κ*min'*prec)-1);
    matcor[i, .] =
        (1/(vecmu[i].*vecmu')).*(matcov[i,.] - ((veccov[i]*veccov')/τ));
    i = i+1;
end;

Décomposition de Choleski
L = chol(matcor)';
retp(L, veclam, vecmu);
endp;

```

*La procédure calculeB est utilisée pour le calcul des termes W et V. Elle renvoie une matrice de dimension ((τ/prec)+1,nbsim).*

**PROC(1) = calculeB(τ, prec, \_Zs, \_veclam, \_vecmu, \_L, \_ur) ;**

*Variables locales de la procédure*

local vecrr, res;

*Initialisation*

```

vecrr = zeros(((τ/prec)+1), nbsim);
res = zeros(((τ/prec)+1), nbsim);
vecrr = mat_L*_ur;
res = _veclam.*_Zs + _vecmu.*vecrr;
retp(res);
endp;

```

*La procédure calculew permet de calculer l'intégrale W par la méthode des trapèzes. Elle fait appel à la procédure calculeB et renvoie un vecteur.*

**PROC(1) = calculew(  $\tau$ , prec);**

*Variables locales de la procédure*

local res, y, som;

y = zeros((( $\tau$ /prec)+1),nbsim);

res = zeros((( $\tau$ /prec)+1),nbsim);

*Appel de la procédure calculeB*

y = calculeB;

res = y[2:( $\tau$ /prec)+1,.\*prec) - (0.5\*(prec\*(y[2:( $\tau$ /prec)+1,.-y[1:( $\tau$ /prec),.])));

*Calcul de la somme des éléments du vecteur res*

som = sumc(res);

retp(som);

endp;

*La procédure calculev permet de calculer l'intégrale V par la méthode des trapèzes.*

*Elle fait appel à la procédure calculeB et renvoie un vecteur.*

**PROC(1) = calculev(  $\tau$ , alphap, prec, Co,  $\kappa$ );**

*Variables locales de la procédure*

local res, y, grandd, som, compteur, z

*Initialisation*

y = zeros((( $\tau$ /prec)+1),nbsim);

z = zeros((( $\tau$ /prec)+1),nbsim);

grandd = zeros((( $\tau$ /prec)+1),1);

res = zeros((( $\tau$ /prec)+1),nbsim);

compteur = { };

compteur = seqa(0, 1, ( $\tau$ /prec)+1);

grandd= alphap+(Co-alphap)\*exp(- $\kappa$ \*compteur\*prec);

*Appel de la procédure calculeB*

y = calculeB;

z = y + grandd;

y = exp(z);

res = (y[2:( $\tau$ /prec)+1,.\*prec) - (0.5\*prec\*(y[2:( $\tau$ /prec)+1,.-y[1:( $\tau$ /prec),.]));

*Calcul de la somme des éléments du vecteur res*

```
som = sumc(res);
retp(som);
endp;
```

*La procédure itération permet de calculer l'exponentielle :*

$y = \exp(\sigma_S * Z_S - ((1-\beta) * W) - \beta * V)$ . Elle renvoie un vecteur de dimension (nbsim,1).

**Proc Itération( $\kappa$ ,  $H$ ,  $\sigma_S$ ,  $\sigma_C$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ , nbsim, prec) ;**

*Variables locales de la procédure*

Local us, w, v, y,z;

*Initialisation*

$y = \text{zeros}(\text{nbsim}, 1)$  ;  $v = \text{zeros}(\text{nbsim}, 1)$  ;  $w = \text{zeros}(\text{nbsim}, 1)$  ;  $z = \text{zeros}(\text{nbsim}, 1)$ ;

*Génération d'un vecteur de variables normales*

$us = \text{rndn}(\text{nbsim}, 1)$  ;

*Génération d'une matrice de variables normales*

$\_ur = \text{rndn}(((\tau/\text{prec})+1), \text{nbsim})$ ;

*Calcul du brownien associé à S, d'espérance nulle, de variance  $\tau$  :*

$z = us * \text{sqrt}(\tau)$ ;

$\_Zs = z'$  ;

*Appel des procédures calculeW et calcule V :*

$w = \text{calculew}(\tau, \text{prec})$ ;

$v = \text{calculev}(\tau, \text{alphap}, \text{prec}, Co, \kappa)$ ;

$y = \sigma_S * z - (1-\beta) * w - \beta * v$  ;

$y = \exp(y)$  ;

$\text{retp}(y)$  ;

$\text{endp}$  ;

## 7. CALCUL DE L'EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES ASSOCIEE AU MODELE ASYMETRIQUE<sup>3</sup>

La dynamique des états, dans le modèle AS, est la suivante : :

$$\begin{cases} dS = (\mu - \tilde{C})Sdt + \sigma_s S dz_s \\ d\tilde{C} = \left( \kappa(\alpha - C)\eta + \frac{1}{2}\beta\sigma_c^2 e^C \right) dt + \eta\sigma_c dz_c \end{cases} \quad (\text{AS2})$$

Avec  $\eta = 1 - \beta(1 - e^C)$ , et  $E[dz_s \times dz_c] = \rho dt$

Le lemme d'Itô est appliqué à la relation associant le prix à terme F et les variables d'état S et C :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left\{ F_t + F_s(dS) + F_{\tilde{C}}(d\tilde{C}) + \frac{1}{2}F_{ss}(dS)^2 + \frac{1}{2}F_{\tilde{C}\tilde{C}}(d\tilde{C})^2 + F_{s\tilde{C}}(d\tilde{C}dS) \right\}$$

En utilisant les propriétés du calcul stochastique, les termes intermédiaires suivants peuvent être déterminés :

$$F_s(dS) = (\mu - \tilde{C})SF_s dt + \sigma_s SF_s dz_s$$

$$F_{\tilde{C}}(d\tilde{C}) = \left( \eta\kappa(\alpha - C) + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \beta e^C \right) F_{\tilde{C}} dt + \sigma_c \eta F_{\tilde{C}} dz_c$$

$$\frac{1}{2}F_{ss}(dS)^2 = \frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 F_{ss} dt$$

$$\frac{1}{2}F_{\tilde{C}\tilde{C}}(d\tilde{C})^2 = \frac{1}{2}\sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{C}\tilde{C}} dt$$

$$F_{s\tilde{C}}(dSd\tilde{C}) = \rho\sigma_s\sigma_c S\eta F_{s\tilde{C}} dt$$

$$F_t dt = -F_\tau dt$$

---

<sup>3</sup> Seules les principales étapes du raisonnement sont exposées ici, celui-ci étant présenté en détail à l'occasion de la détermination de l'équation aux dérivées partielles associée aux modèles BG et MR, au chapitre quatre.

En remplaçant ces termes par leur valeur, et en séparant les termes déterministes des termes aléatoires, l'expression du rendement instantané du prix à terme est obtenue :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + \rho \sigma_s \sigma_c S \eta F_{s\tilde{c}} + (\mu - \tilde{C}) S F_s + \left( \eta \kappa (\alpha - C) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \beta e^C \right) F_{\tilde{c}} - F_\tau \right\} dt + \frac{1}{F} \{ \sigma_s S F_s dz_s + \sigma_c \eta F_{\tilde{c}} dz_c \}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$dF/F = E(S, C, t, T) dt + Z_1(S, C, t, T) dz_s + Z_2(S, C, t, T) dz_c$$

Un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture permet d'obtenir la prime de terme du modèle AS. Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, il est alors possible d'établir une relation linéaire entre les fonctions E, Z<sub>1</sub> et Z<sub>2</sub>, indépendante de la maturité  $\tau$  :

$$E(S, \tilde{C}, \tau) = \lambda_s Z_1(S, \tilde{C}, \tau) + \lambda_c Z_2(S, \tilde{C}, \tau)$$

La prime de terme du modèle AS est exprimée de la façon suivante :

$$\phi(S, \tilde{C}, \tau) = E(S, \tilde{C}, \tau) = \lambda_s \sigma_s S \frac{F_s}{F} + \lambda_c \sigma_c \eta \frac{F_{\tilde{c}}}{F}$$

En remplaçant l'espérance de rendement instantané du prix à terme  $E(S, \tilde{C}, \tau)$  par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + \rho \sigma_s \sigma_c S \eta F_{s\tilde{c}} + (\mu - \tilde{C}) S F_s + \left( \eta \kappa (\alpha - C) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \beta e^C \right) F_{\tilde{c}} - F_\tau \right\} = \frac{\lambda_s \sigma_s S F_s}{F} + \frac{\lambda_c \sigma_c \eta F_{\tilde{c}}}{F}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + \rho \sigma_s \sigma_c S \eta F_{s\tilde{c}} + (\mu - \tilde{C} - \lambda_s \sigma_s) S F_s + \left[ \eta (\kappa (\alpha - C) - \lambda_c \sigma_c) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \beta e^C \right] F_{\tilde{c}} - F_\tau = 0$$

En univers risque neutre et en posant :  $\lambda = \lambda_c \sigma_c$  et  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$ , l'équation aux dérivées partielles permettant de valoriser les prix à terme à partir du modèle AS est obtenue :

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{C}\tilde{C}} + \rho\sigma_s\sigma_c S\eta F_{s\tilde{C}} + (r - \tilde{C})SF_s + \left[\eta\kappa(\hat{\alpha} - C) + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \beta e^C\right]F_{\tilde{C}} - F_\tau = 0}$$

(AS3)

Avec :  $\eta = 1 - \beta(1 - e^C)$ , et  $\tilde{C}(t) = (1 - \beta)C(t) + \beta C_1(t)$

La condition aux bornes associée est la suivante :

$$F(S, \tilde{C}, T, T) = S(T)$$



## ANNEXE 6 : DONNEES UTILISEES

### 1. PRIX DU PETROLE BRUT<sup>1</sup>

**Tableau A6.1. Données de prix utilisées pour les estimations, 1991-1995**

01 avril 1991- 18 septembre 1995  
234 × 4 observations hebdomadaires

	Moyenne	Ecart-type
F1	19,17	2,12
F3	19,13	2,00
F6	19,09	1,79
F9	19,05	1,60

**Tableau A6.2. Données de prix utilisées pour les tests en extrapolation sur trois mois, 1995**

25 septembre 1995 – 25 décembre 1995  
14 × 4 observations hebdomadaires

	Moyenne	Ecart-type
F1	18,07	0,72
F3	17,62	0,56
F6	17,31	0,38
F9	17,15	0,31

**Tableau A6.3. Données de prix utilisées pour les tests en extrapolation sur six mois, 1995**

25 septembre 1995 – 26 mars 1996  
26 × 4 observations hebdomadaires

	Moyenne	Ecart-type
F1	18,07	0,72
F3	17,62	0,56
F6	17,31	0,38
F9	17,15	0,31

<sup>1</sup> Données NYMEX, contrat WTI.

**Tableau A6.4 Données de prix utilisées pour les estimations, 1995-1998**

25 septembre 1995 - 11 mai 1998  
 138 × 4 observations hebdomadaires

	Moyenne	Ecart-type
F1	20,24	2,81
F3	19,72	2,30
F6	19,30	1,79
F9	19,01	1,48

**Tableau A6.5. Données de prix utilisées pour les tests en extrapolation sur trois mois, 1998**

18 mai 1998 – 17 août 1998  
 14 × 4 observations hebdomadaires

	Moyenne	Ecart-type
F1	13,77	0,83
F3	14,77	0,76
F6	15,74	0,75
F9	16,76	0,69

**Tableau A6.6. Données de prix utilisées pour les tests en extrapolation sur six mois, 1998**

18 mai 1998 – 16 novembre 1998  
 27 × 4 observations hebdomadaires

	Moyenne	Ecart-type
F1	13,98	0,87
F3	14,69	0,77
F6	15,46	0,76
F9	15,94	0,72

## 2. TAUX D'INTERET<sup>2</sup>

**Tableau A6.7. Taux des bons du Trésor américain à 3 mois utilisés pour les estimations**

	Moyenne	Ecart-type
01 avril 91 - 18 septembre 1995	0.049	0.016
25 septembre 95 - 11 mai 1998	0.05	0.001

<sup>2</sup> Données Reuter.



## ANNEXE 7 : PROGRAMME UTILISE POUR LE FILTRE DE KALMAN SIMPLE

Ce programme procède en trois étapes :

- 1- A partir d'un vecteur de paramètres initiaux, à l'aide du filtre de Kalman,  $\log l(t)$ , le logarithme de la vraisemblance de chaque observation  $y_t$ , est calculé.
- 2- Le vecteur de paramètres optimaux maximisant la vraisemblance est calculé.
- 3- Le filtre de Kalman est utilisé une seconde fois pour calculer les prix à terme et les variables d'état correspondant aux paramètres optimaux.

Ce programme comprend deux parties :

- La procédure principale
- Les procédures auxiliaires :
  - procédure  $ml(param)$  : elle renvoie le logarithme de la vraisemblance de chaque observation. Elle fait elle-même appel à la procédure *filtre de Kalman et fonction de vraisemblance associée*,
  - procédure *filtre de Kalman et fonction de vraisemblance associée*,
  - la procédure de maximisation.

### *1. PROCEDURE PRINCIPALE*

*Déclaration de variables globales*

Matrice \_mv \_fonction ;  
Matrice \_mv\_covariance ;  
Matrice \_mv\_algorithme = 1 ;  
Matrice \_information ;  
Matrice \_kalman\_logl\_correction = 0 ;  
Deltat = 1/52 ; (*les observations sont hebdomadaires*)

*Ouverture et lecture du fichier de données*

*Données : nombre d'observations = nobs. Nombre de maturités par observation : n = 4 (1, 3, 6 et 9 mois)*

Open fichier = c:\gauss\.... ;

x = readr(fichier,nobs) ;

PAT1 = x[, 1] ;

PAT3 = x[, 2] ;

PAT6 = x[, 3] ;

PAT9 = x[, 4] ;

y = ln(PAT1)~ln(PAT3)~ln(PAT6)~ln(PAT9)<sup>1</sup> ;

*Déclaration des valeurs initiales des paramètres : vecteur start<sup>2</sup>*

start = kappai| mui| sigmasi|alphai|sigmaci| rhoi|lambdai ;

*Appel de la procédure de maximisation. La procédure de maximisation utilise la procédure ml(param) et le vecteur de paramètres initiaux (start). La procédure ml(param) renvoie le logarithme de la vraisemblance de chaque observation (logl). Cette procédure existe uniquement parce que la procédure de maximisation doit appeler une procédure ne comportant qu'un seul argument.*

*A l'intérieur de la procédure ml(param), la procédure filtre de Kalman et fonction de vraisemblance associée est appelée. Cette dernière permet de calculer logl à partir du vecteur de paramètres initiaux.*

*La procédure de maximisation renvoie le vecteur param des paramètres maximisant la somme de logl, l'écart-type de ces paramètres (stderr), le gradient (g), la matrice de variance-covariance (covparam), et la valeur maximale de la somme de logl (fmax) qui sont associées à ces paramètres.*

{ param, stderr, covparam, g, fmax } = maximum\_vraisemblance(&ml, start) ;

---

<sup>1</sup> Le séparateur ~ permet la concaténation horizontale.

<sup>2</sup> Le séparateur | permet la concaténation verticale.

Le vecteur param des paramètres optimaux s'écrit :  $param = \begin{pmatrix} param(1) \\ param(2) \\ param(3) \\ param(4) \\ param(5) \\ param(6) \\ param(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ \mu \\ \sigma_s \\ \alpha \\ \sigma_c \\ \rho \\ \lambda \end{pmatrix}$

**Définition des matrices du système.** Ce dernier comporte deux équations : une équation de mesure :  $(y_t = Z\alpha t + d + \varepsilon_t)$  et une équation de transition  $(\alpha t = T\alpha(t-1) + c + R\eta t)^3$ . Les matrices du système sont  $Z, d, H, T, R, Q, c$ .

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & \begin{pmatrix} -\frac{1-e^{-(1/12)}}{\kappa} \end{pmatrix} \\ 1 & \begin{pmatrix} -\frac{1-e^{-(3/12)}}{\kappa} \end{pmatrix} \\ 1 & \begin{pmatrix} -\frac{1-e^{-(6/12)}}{\kappa} \end{pmatrix} \\ 1 & \begin{pmatrix} -\frac{1-e^{-(9/12)}}{\kappa} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{Matrice de dimension } (n \times nb \text{ d'états})$$

$d = [B(\tau_i)] \quad \tau_i = \{(1/12), (3/12), (6/12), (9/12)\}$ ,  $d$  vecteur de dimension  $(n \times 1)$

$$B[\tau_i] = \left[ \left( r - (\alpha - (\lambda/\kappa)) + \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_c^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_s \times \sigma_c \times \rho}{\kappa} \right) \times \tau_i \right] + \left[ \frac{1}{4} \sigma_c^2 \times \frac{1 - e^{-2\kappa\tau_i}}{\kappa^3} \right] + \left[ \left( (\alpha - (\lambda/\kappa)) \times \kappa + \sigma_s \times \sigma_c \times \rho - \frac{\sigma_c^2}{\kappa} \right) \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau_i}}{\kappa^2} \right) \right]$$

$$H = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \times \text{deltat} \quad H = \text{Var}[\varepsilon_t], \text{ matrice de dimension } (n \times n)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\text{deltat} \\ 0 & 1 - \kappa \text{deltat} \end{bmatrix} \quad \text{Matrice de dimension } (nb \text{ d'états} \times nb \text{ d'états})$$

<sup>3</sup> Ces équations sont présentées au chapitre cinq.

$$c = \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \text{deltat} \quad \kappa \text{deltat} \right]'$$

Vecteur de dimension (nb d'états)

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s \sigma_c \rho \\ \sigma_s \sigma_c \rho & \sigma_c^2 \end{bmatrix} \times \text{deltat} \quad Q = \text{Var}[\eta_t], \text{ matrice de dimension (nbetats*nbetats)}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de dimension (nbetats\*nbetats)

### **Initialisation du système**

$$a0 = [\ln(S0) \quad C0]$$

Vecteur de dimension (nbetats)

$$P0 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \times \text{deltat}$$

Matrice de covariance associée à a0, dimension  
(nbetats\*nbetats)

**Appel de la procédure filtre de Kalman.** Cette procédure utilise les prix à terme observés (y), ainsi que les matrices et la position initiale du système. Elle renvoie la matrice de prix à terme estimés (y\_cond), la matrice de covariance associée à y (F), la matrice d'innovations (v), la matrice de variables d'état (a), la matrice de covariance associée aux variables d'état (P), la matrice des espérances conditionnelles des variables d'état (a\_cond), la matrice de covariance associée à a\_cond, (P\_cond), et le vecteur des logarithmes des vraisemblances, calculé sur les innovations (logl).

{y\_cond,v,a,a\_cond,P,P\_cond,F,logl}=kalman\_filter(y,Z,d,T,c, R,a0,P0,H,Q,0) ;

closeall ;

end ;

## **2. PROCÉDURES AUXILIAIRES**

### **2.1. PROCÉDURE ML(PARAM)**

La procédure ml(param) est nécessaire à l'utilisation de la procédure de maximisation. Cette dernière maximise en effet une procédure qui ne doit comporter qu'un seul argument. La procédure ml(param) est donc de dimension 1. Elle renvoie le vecteur

*logl*, qui correspond, pour chaque observation, au logarithme de la vraisemblance. Le vecteur *logl* est calculé à l'aide de la procédure filtre de Kalman et fonction de vraisemblance associée.

La procédure *ml(param)* possède une structure proche de celle du programme principal : déclaration de variables, définition des matrices du système, initialisation du système, et appel à la procédure filtre de Kalman et fonction de vraisemblance associée.

**PROC(1) = ml (param) ;**

***Variables locales de la procédure***

*logl* : logarithme de la vraisemblance d'une observation

*y\_cond* : matrice de prix à terme estimés

*v* : innovations (prix observés – prix estimés)

*a* : variables d'état estimées

*a\_cond* : espérance conditionnelle des variables d'état

*P* : matrice de covariance des variables d'état *a*

*P\_cond* : matrice de covariance de *a\_cond*

*F* : matrice de covariance de *y\_cond*

*Vrai* : variable logique

*d*, *T*, *Z*, *c*, *Q*, *H*, *R* : matrices du système

***Définition des matrices du système<sup>4</sup>***

*d* = ...;      *T* = ...;      *Z* = ...;      *c* = ...;      *Q* = ...;

*H* = ...;      *R* = ...;

***Initialisation du système***

*a0* = ...;      *P0* = ...;

***Appel de la procédure filtre de Kalman et fonction de vraisemblance associée***

{*y\_cond*,*v*,*a*,*a\_cond*,*P*,*P\_cond*,*F*,*logl*}=kalman\_filter(*y*,*Z*,*d*,*Tc*, *R*,*a0*,*P0*,*H*,*Q*,0) ;

retp(*logl*) ;

endp ;

---

<sup>4</sup> Voir la procédure principale.



## 2.2. PROCEDURE FILTRE DE KALMAN ET FONCTION DE VRAISEMBLANCE ASSOCIEE<sup>5</sup>

*Cette procédure utilise les variables observées y, les matrices du système Z,c,d,T,R,H,Q, ainsi que la position initiale du système (a0, P0). Temps est une variable logique prenant la valeur 0 si les matrices du système sont constantes, 1 sinon.*

*La procédure renvoie 8 éléments : les prix estimés (y\_cond), la matrice de covariance associée (F), les innovations (v), les variables d'état (a), la matrice de covariance associée aux variables d'état (P), les espérances conditionnelles des variables d'état (a\_cond), la matrice de covariance associée à a\_cond (P\_cond), et le logarithme de la vraisemblance (logl).*

*Elle procède selon les étapes suivantes : initialisation des variables, itération sur les observations, à l'intérieur de laquelle sont calculées 1) les espérances conditionnelles des variables d'état et leur matrice de covariance, 2) les prix estimés et les innovations, 3) la matrice de covariance associée aux prix estimés, les variables d'état et leur matrice de covariance, 4) le logarithme de la vraisemblance.*

**PROC(8) = kalman\_filter(y, Z, d, T, c, R, a0, P0, H, Q, temps) ;**

**Variables locales de la procédure**

nobs, y\_cond, v, a, a\_cond, P, P\_cond, F, logl, Z,d,T,c,R,H,Q, n

yt : vecteur de prix observés à la date t

yt/t-1 : prix calculés à la date t, conditionnellement à l'information disponible en (t-1)

vt : vecteur d'innovations à la date t

Ft : matrice de covariance, à la date t, des prix à terme estimés, dimension (n \* nbmat)

inv\_Ft : matrice inverse de Ft

dFt : déterminant de la matrice Ft

at : vecteur de variables d'état à la date t

at/t-1 : vecteur des espérances en t des variables d'état, conditionnellement à l'information disponible en (t-1)

Pt : matrice de covariance de at

Pt/t-1 : matrice de covariance de at/t-1

*m : nombre de colonnes de la matrice Z*

*g : nombre de colonnes de la matrice R*

*i : variable d'itération*

### ***Dimensionnement des matrices et initialisation***

*nobs = rows(y) ; n = cols(y) ; n = nombre de maturités*

*m = cols(Z) ; g = cols(R) ; at = a0 ; at/t-1 = a0 ; Pt = P0 ; Pt/t-1 = P0 ;*

*y\_cond = zeros(nobs, n) ;*

*v = zeros(nobs, n) ;*

*F = zeros(nobs, n\*n) ;*

*a = zeros(nobs, m) ;*

*a\_cond = zeros (nobs, m) ;*

*P = zeros (nobs, mxm) ;*

*P\_cond=zeros(nobs, mxm) ;*

*logl = zeros(nobs, 1) ;*

### ***Itération***

*i = 1 ;*

*do until i > nobs ;*

*yt = y[i,.]' ;*

***Equations de prédiction*** (*Espérance des variables d'état compte tenu de leur dynamique, conditionnellement à l'information passée*)

*at/t-1 = T \*at-1 + c*

*Matrice de covariance des états conditionnellement à sa valeur en (t-1) et compte tenu de la dynamique des états*

*Pt/t-1 = T Pt-1 T' + R Q R' ;*

***Innovations*** (*Prix à terme estimés à la date t, compte tenu de l'équation de mesure et de l'espérance conditionnelle des variables d'état*)

*yt/t-1 = Z at/t-1 + d*

---

<sup>5</sup> Cette procédure est celle proposée par T. Roncalli, 1995 : « Introduction à la programmation sous

*Innovations à la date t*

$$v_t = y_t - y_{t/t-1}$$

**Mise à jour** (Matrice de covariance des prix à terme estimés  $F_t$ , compte tenu de la matrice conditionnelle de covariance des états)

$$F_t = Z^* P_{t/t-1} * Z' + H$$

*Inversion de  $F_t$*

$$\text{Inv\_}F_t = \text{invpd}(F_t)$$

*Variables d'état corrigées en fonction de l'information disponible en t*

$$a_t = a_{t/t-1} + P_{t/t-1} * Z' * \text{inv\_}F_t * v_t$$

*Matrice de covariance associée aux états, corrigée*

$$P_t = P_{t/t-1} - P_{t/t-1} * Z' * \text{inv\_}F_t * Z * P_{t/t-1}$$

**Stockage des résultats à chaque itération**

$$y\_cond[i,] = y_{t/t-1}'; \quad v[i,] = v_t'; \quad a[i,] = a_t'; \quad a\_cond[i,] = a_{t/t-1}';$$

$$P[i,] = \text{vecr}(P_t)'; \quad P\_cond[i,] = \text{vecr}(P_{t/t-1})'; \quad F[i,] = \text{vecr}(F_t)';$$

**Vraisemblance** (la variable globale *kalman\_logl\_correction* permet de corriger la valeur de la vraisemblance lorsque le déterminant de  $F$  est nul)

if  $F_t == \text{zeros}(n,n)$  ;

$$dF_t = 0 ;$$

else ;

$$dF_t = \det(F_t) ;$$

endif ;

if *\_kalman\_logl\_correction* == 1 ;

$$dF_t = dF_t * (dF_t > 0) + (1^E - 10) * (dF_t \leq 0) ;$$

endif ;

*Le logarithme de la vraisemblance pour l'observation i est exprimé en termes d'innovations*

$$\log l[i] = -(n/2) * \ln(2 * \pi) - 0.5 * \ln(dF_t) - 0.5 * v_t' * \text{inv\_}F_t * v_t ;$$

$$i = i + 1 ;$$

endo ;

```
retp(y_cond, v, a, a_cond, P, P_cond, F, logl) ;
endp ;
```

## 2.3. PROCEDURE DE MAXIMISATION ET PROCEDURES ASSOCIEES

### 2.3.1. Procédure maximum\_vraisemblance

*Cette procédure est une procédure de maximisation. Elle utilise le vecteur de paramètres param et la procédure f . Cette dernière ne doit comporter qu'un seul argument, ce qui explique la présence, dans l'algorithme, de la procédure ml(param).*

*La procédure de maximisation renvoie 5 éléments : le vecteur de paramètres param qui maximise f, l'écart-type de ces paramètres (stderr), leur matrice de covariance (covparam), leur gradient (g) et la valeur maximale de f (fmax).*

*Cette procédure comporte les étapes suivantes : 1) déclaration des variables locales, 2) calcul, à l'aide de la procédure mv(param), de l, partie réelle de f 3) calcul, à l'aide de la procédure mv\_sum(param), de lsum, somme de l 4) calcul, à l'aide de la procédure mv\_sum\_oppose, de l'opposé de lsum. L'opposé de lsum est calculé parce que la procédure de maximisation utilise un algorithme de minimisation (optmum).*

**PROC (5) = maximum\_vraisemblance(f,param) ;**

***Variables locales de la procédure***

*nobs : nombre d'observations*

*k : nombre de lignes du vecteur start, vecteur initial de paramètres*

*t : nombre de lignes de la fonction f(start), une fois les lignes contenant des valeurs manquantes éliminées*

*ddl : nombre de degrés de liberté*

*param : vecteur final de paramètres*

*g : gradient des paramètres (matrice jacobienne)*

*h : matrice hessienne des paramètres*

*covparam : matrice de covariance des paramètres*

*stderr : ecart-type des paramètres*

tstudent : variable student associée aux paramètres

pvalue : significativité des paramètres

corparam : coefficient de corrélation des paramètres

name : nom de chaque paramètre

La procédure *f* est « passée », grâce à la variable globale *\_mv\_fonction*, à l'intérieur de la procédure *mv(param)*.

*\_mv\_fonction* = &*f* ;

**Appel de la procédure *optmum*.** Cette procédure utilise le vecteur de paramètres initiaux (*start*) et la procédure *mv\_sum\_oppose*, qui ne comporte, là encore, qu'un seul argument. Elle renvoie le vecteur de paramètres *param* « maximisant » *mv\_sum\_oppose*, la valeur « maximale » de *mv\_sum\_oppose*, *fmax*, le gradient associé à ces paramètres (*gb*). L'algorithme d'optimisation est celui de Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno (BFGS).

{*param*, *fmax*, *gb*} = *optmum*(&*\_mv\_sum\_oppose*, *start*) ;

*fmax* = -*fmax* ;

**Estimation de la matrice de covariance des paramètres par la matrice jacobienne**

Calcul du gradient sur *mv*

*g* = *gradp*(&*\_mv*, *param*)

Calcul des covariances des paramètres

*covparam*=*invpd*(*g'**g*) ;

*\_information* = *g'**g* ;

Calcul de l'écart type des paramètres, de leur coefficient de corrélation, de la variable *tstudent* qui leur est associée, et de la significativité des paramètres

*stderr* = *sqrt*(*diag*(*covparam*)) ;

*corparam* = *covparam*./*stderr*./*stderr'* ;

*tstudent* = *param*./*stderr* ;

*pvalue* = 2\**cdftc*(*abs*(*tstudent*),*ddl*) ;

*retp*(*param*, *stderr*, *covparam*, *g*, *fmax*) ;

endp ;

### 2.3.2 Procédures auxiliaires

**Procédure mv(param).** Elle renvoie l, partie réelle de la variable mv\_fonction, une fois les valeurs manquantes éliminées :

```
PROC_mv(param) ;
local fonction, l ;
fonction = _mv_fonction ;
local fonction : proc ;
l = packr(real(fonction(beta))) ;
retp(l)
endp ;
```

**Procédures mv\_sum(param) et mv\_sum\_oppose(param).** La somme de l est tout d'abord calculée au moyen de la procédure mv\_sum(param). L'opposé de cette somme est calculé au moyen de la procédure mv\_sum\_oppose(param)

```
PROC_mv_sum(param) ;
local l, lsum ;
l = _mv(param) ;
lsum = sumc(l);
retp(lsum) ;
endp ;
```

```
PROC_mv_sum_oppose(param) ;
local lsum ;
lsum = _mv_sum(param) ;
retp(-lsum) ;
endp ;
```

## ANNEXE 8 : PROGRAMME UTILISE POUR LE FILTRE DE KALMAN ETENDU

Comme pour le filtre de Kalman simple, ce programme procède en trois étapes :

1. A partir d'un vecteur de paramètres initiaux, à l'aide du filtre de Kalman étendu,  $\log l(t)$ , le logarithme de la vraisemblance de chaque observation  $y_t$ , est calculé.
2. Le vecteur de paramètres optimaux maximisant la vraisemblance est déterminé.
3. Le filtre de Kalman étendu est utilisé une seconde fois pour calculer les prix à terme et les variables d'état correspondant aux paramètres optimaux.

Les principales différences entre ce programme et celui présenté en annexe sept proviennent de la nécessité de simuler les prix à terme, et de la modification des équations de mesures et de transition, due au passage d'un filtre de Kalman simple à un filtre de Kalman étendu. Cette modification conduit à transformer les matrices du système du filtre de Kalman simple, T, Z, et R, en fonctions.

Dans le filtre de Kalman étendu, la fonction  $Z(\alpha_t)$  de l'équation de mesure comprend une espérance qui doit être simulée :

$$Z(\alpha_t) = [S_t \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C_t) \times E_t[\exp(\sigma_S Z_S(\tau) - (1 - \beta)W(\tau) - \beta V(\tau))]]$$

avec :  $Z_S(\tau) = \int_t^T dz_S(y) = u_S \sqrt{\tau}$ , où  $u_S \sim N(0,1)$

$$W(\tau) = \int_t^T B(v)dv = \int_t^T \sigma_c e^{-\kappa v} \left\{ \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right\} dv, \text{ avec } v < T$$

Les deux variables normales utilisées pour calculer  $Z_S$  et  $B(v)$  sont générées avec un germe, sous forme de matrices. L'utilisation d'un germe pour chacune des deux séries de nombres aléatoires introduit une cohérence entre les prix à terme simulés et facilite la procédure d'optimisation. Par ailleurs, elle permet la répétition d'expériences identiques. Enfin, pour minimiser le temps de calcul, ces nombres aléatoires ne sont générés qu'une fois pour toute la procédure d'optimisation.

Le programme comprend deux parties :

- La procédure principale,
- Les procédures auxiliaires : :
  - **Procédures utilisées pour la simulation des prix à terme** : *calculemat*, *calculeB*, *calculew*, *calculev*, et *itération*.

Ces procédures sont présentées en annexe cinq. L'utilisation d'un germe permet de ne faire appel aux procédures *calculemat*, *calculeB* et *calculew* qu'une fois pour chaque maturité et chaque jeu de paramètres. Il en est de même pour une partie de l'exponentielle permettant de déterminer l'espérance de la fonction  $Z(\alpha_t)$ . Cette partie est en effet indépendante des variables d'état. Elle est appelée *\_yint*. Les quatre vecteurs *\_vecb* et les quatre vecteurs *\_yint* correspondant à chaque maturité sont indexés dans une matrice. Ils sont utilisés dans la procédure *Deriv\_Z*.

- **Procédures utilisées pour le filtre de Kalman étendu** : procédures *R*, *T*, *Deriv\_T*, *Z*, *Deriv\_Z*, *ItérationP*, *calculevP* et *filtre de Kalman et fonction de vraisemblance associée*.

Les procédures *R* et *T* correspondent aux fonctions  $R(\alpha_{t-1})$  et  $T(\alpha_{t-1})$  de l'équation de transition du filtre de Kalman étendu : *T* permet de calculer les espérances conditionnelles des variables d'état, *R* permet de déterminer la matrice de covariance associée aux variables d'état. La procédure *Z* correspond à la fonction  $Z(\alpha_t)$  de l'équation de mesure du filtre de Kalman



étendu. Elle permet de calculer les prix à terme en fonction des valeurs des variables d'état.

- Enfin, les équations de mesure et de transition n'étant plus linéaires dans le cadre du filtre de Kalman étendu, les procédures *Deriv\_T* et *Deriv\_Z* permettent de calculer les développements limités de Taylor associés aux fonctions  $T(\alpha_{t-1})$  et  $Z(\alpha_t)$ . Là encore, pour réduire le temps de calcul, les prix ne sont calculés que dans la procédure *Deriv\_Z*, puis sont réutilisés dans la procédure *Z*. Les procédures *ItérationP* et *calculevP* permettent de calculer les dérivées des prix à terme par rapport aux variables d'état. Ces procédures sont utilisées dans *Deriv\_Z*.
- **Procédures utilisées pour l'optimisation** : elles sont identiques à celles présentées en annexe sept.

## 1. PROCEDURE PRINCIPALE

### *Déclaration des variables globales :*

*Variables globales utilisées dans la procédure maximum vraisemblance :*

Matrice \_mv\_fonction; Matrice \_mv\_covariance = 3; Matrice \_mv\_algorithme = 1;

Matrice \_information ; <sup>1</sup>

*Variables globales utilisées dans la procédure filtre de Kalman :*

Matrice\_kalman\_log\_correction = 0;

NLKF\_Deriv\_Z = &DerivZ; NLKF\_Deriv\_T = &DerivT; <sup>2</sup>

*Variables globales utilisées dans les procédures associées au filtre de Kalman étendu :*

\_Item = 0; \_ItemP = 0; \_fa = { }; \_fp = { }; \_fsem = { };

\_grandap = { }; \_grandh = { }<sup>3</sup>;

---

<sup>1</sup> Les variables globales, utilisées dans l'ensemble du programme, sont distinguées des variables locales, utilisées au sein d'une procédure auxiliaire, par le tiret « \_ » qui précède leur nom.

<sup>2</sup> « & » est un pointeur permettant l'appel d'une procédure.

<sup>3</sup> Les accolades { } sont utilisées pour déclarer un vecteur.

*Variables globales utilisées pour la génération de nombres aléatoires normaux:*

```
_urstart = { }; _ur1 = { }; _ur2 = { }; _ur3 = { }; _ur4 = { }; _ur = { };
_us = { }; _Zs = { }; _Zs1 = { }; _Zs2 = { }; _Zs3 = { }; _Zs4 = { };
_Zst = { }; _Zst1 = { }; _Zst2 = { }; _Zst3 = { }; _Zst4 = { };
```

*Variables globales utilisées pour la simulation des prix à terme :*

```
mat_L1 = { }; mat_L2 = { }; mat_L3 = { }; mat_L4 = { }; mat_L = { };
_veclam1 = { }; _veclam2 = { }; _veclam3 = { }; _veclam4 = { }; _veclam = { };
_vecmu1 = { }; _vecmu2 = { }; _vecmu3 = { }; _vecmu4 = { }; _vecmu = { };
_vecb1 = { }; _vecb2 = { }; _vecb3 = { }; _vecb4 = { }; _vecb = { }; _vb = { };
_vecw1 = { }; _vecw2 = { }; _vecw3 = { }; _vecw4 = { }; _vecw = { };
_yint1 = { }; _yint2 = { }; _yint3 = { }; _yint4 = { }; _yint = { }; _vyint = { };
```

*Variables globales utilisées pour calculer mat\_L, \_vecmu, et \_veclam :*

```
_comp1 = 0; _comp2 = 0;
```

*Variables globales utilisées pour stocker les vecteurs de paramètres :*

```
_passage = { }; _param = { }; _start = { };
```

### ***Initialisation :***

*Vecteur de maturités des prix à terme :*

```
vectau = ((1/12)|(3/12)|(6/12)|(9/12));
tau1 = vectau[1]; tau2 = vectau[2]; tau3 = vectau[3]; tau4 = vectau[4];
```

*Nombre de simulations par maturité*

```
nbsim= 1000;
prec = 1E-2; E = 1E-124;
deltat = 1/52;
```

*Germes utilisés pour la génération de variables gaussiennes :*

```
seed1 = 222; seed2 = 1550;
```

*Génération de variables gaussiennes :*

```
_us = rndns(nbsim, 1, seed1);
_Zs1 = _us * sqrt(tau1); _Zs2 = _us*sqrt(tau2); _Zs3 = _us*sqrt(tau3);
```

```

_Zs4 = _us*sqrt(tau4);
_Zst1 = _Zs1'; _Zst2 = _Zs2'; _Zst3 = _Zs3'; _Zst4 = _Zs4';

_urstart = rndns((tau4/prec)+1), nbsim, seed2);
_ur1 = _urstart[1 : (tau1/prec)+1, .]; _ur2 = _urstart[1 : (tau2/prec)+1, .];
_ur3 = _urstart[1 : (tau3/prec)+1, .]; _ur4 = _urstart[1 : (tau4/prec)+1, .];

Valeurs initiales des paramètres :
kappas = ...; mus = ...; sigmass = ...; alphas = ...;
sigmacs = ...; rhos = ...; lambdas = ...; betas = ...;
alphaps = alphas - (lambdas/kappas);

Valeurs initiales des variables d'état :
So = ...; Co = ...;
Taux d'intérêt :
ri = ...;

Ouverture et lecture du fichier de données :
Données : nombre d'observations = nobs; nombre maturités par observation : n = 4;
Open fichier = c:\ gauss\....;
x = readr(fichier, nobs);
PAT1 = x[1,.]; PAT3 = x[2,.]; PAT6 = x[3,.]; PAT9 = x[4,.];
y = PAT1~PAT3~PAT6~PAT95;

_kappa = _kappas; _mu = mus; _sigmas = _sigmass; _alpha = _alphas;
_sigmac = _sigmacs; _rho = _rhos; _lambda = _lambdas; _beta = _betas;
_alphap = _alphaps;

_grandh = (1 - exp(- _kappa*vectau))/ _kappa;
_grandap = exp((ri-(0,5* _sigmas^2))*vectau)+_alphap*(1-_beta)*(_grandh- vectau);
_comp1 = (1/ _kappa) * _sigmac * _rho;
_comp2 = _sigmac^2/(2* _kappa);

{mat_L1, _veclam1, _vecmu1} = calculeL(tau1, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);

```

---

<sup>4</sup> Voir l'annexe cinq, section 4.

<sup>5</sup> ~ est un symbole de concaténation horizontale.

```
{mat_L2, _veclam2, _vecmu2} = calculeL(tau2, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
{mat_L3, _veclam3, _vecmu3} = calculeL(tau3, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
{mat_L4, _veclam4, _vecmu4} = calculeL(tau4, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);

_vecb1 = calculeB(mat_L1, _veclam1, _vecmu1, _Zst1, _ur1);
_vecb2 = calculeB(mat_L2, _veclam2, _vecmu2, _Zst2, _ur2);
_vecb3 = calculeB(mat_L3, _veclam3, _vecmu3, _Zst3, _ur3);
_vecb4 = calculeB(mat_L4, _veclam4, _vecmu4, _Zst4, _ur4);
let _vb[4,1] = _vecb1 _vecb2 _vecb3 _vecb4 ;6

_vecw1 = calculew(tau1, prec, _vecb1);
_vecw2 = calculew(tau2, prec, _vecb2);
_vecw3 = calculew(tau3, prec, _vecb3);
_vecw4 = calculew(tau4, prec, _vecb4);

_yint1 = _sigmas*_Zs1 - (1- _beta)*_vecw1;
_yint2 = _sigmas*_Zs2 - (1 - _beta)*_vecw2;
_yint3 = _sigmas*_Zs3 - (1 - _beta)*_vecw3;
_yint4 = _sigmas*_Zs4 - (1 - _beta)*_vecw4;
let _vyint[4,1] = _yint1 _yint2 _yint3 _yint4;
```

*Vecteur de paramètres initiaux :*

```
start = ( _kappa| _mu| _sigmas| _alpha| _sigmac| _rho| _lambda| _beta);
```

*Appel de la procédure de maximisation<sup>7</sup>. Cette procédure renvoie le vecteur param des paramètres maximisant le logarithme de la vraisemblance, l'écart-type de ces paramètres, leur gradient, la matrice de covariance, et la valeur maximale de la fonction de vraisemblance qui leur sont associées. Elle utilise le vecteur de paramètres initiaux.*

```
{ param, stderr, covparam, g, fmax } = maximum_vraisemblance(&ml, start);
```

*Les paramètres optimaux sont utilisés pour recalculer les variables globales :*

```
_kappa = param[1]; _mu = param[2]; _sigmas = param[3]; _alpha = param[4];
```

---

<sup>6</sup> Cette commande permet d'indexer les vecteurs \_vecb1, \_vecb2, \_vecb3 et \_vecb4 dans une matrice.

<sup>7</sup> Voir l'annexe sept.

```

_sigmac = param[5]; _rho = param[6]; _lambda = param[7]; _beta = param[8];
_alphap = _alpha - ( _lambda/_kappa );
_grandh = (1 - exp(- _kappa*vectau))/ _kappa;
_grandap = exp((ri-(0,5* _sigmas^2))*vectau)+_alphap*(1-_beta)*(_grandh- vectau);
_comp1 = (1/ _kappa) * _sigmac * _rho;   _comp2 = _sigmac^2/(2* _kappa);

{mat_L, _veclam1, _vecmu1} = calculeL(tau1, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
{mat_L2, _veclam2, _vecmu2} = calculeL(tau2, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
{mat_L3, _veclam3, _vecmu3} = calculeL(tau3, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
{mat_L4, _veclam4, _vecmu4} = calculeL(tau4, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);

_vecb1 = calculeB(mat_L1, _veclam1, _vecmu1, _Zst1, _ur1) ;
_vecb2 = calculeB(mat_L2, _veclam2, _vecmu2, _Zst2, _ur2) ;
_vecb3 = calculeB(mat_L3, _veclam3, _vecmu3, _Zst3, _ur3) ;
_vecb4 = calculeB(mat_L4, _veclam4, _vecmu4, _Zst4, _ur4) ;
let _vb[4,1] = _vecb1 _vecb2 _vecb3 _vecb4 ;

_vecw1 = calculew(tau1, prec, _vecb1) ;
_vecw2 = calculew(tau2, prec, _vecb2) ;
_vecw3 = calculew(tau3, prec, _vecb3) ;
_vecw4 = calculew(tau4, prec, _vecb4) ;

_yint1 = _sigmas*_Zs1 - (1- _beta)*_vecw1 ;
_yint2 = _sigmas*_Zs2 - (1 - _beta)*_vecw2 ;
_yint3 = _sigmas*_Zs3 - (1 - _beta)*_vecw3 ;
_yint4 = _sigmas*_Zs4 - (1 - _beta)*_vecw4 ;
let _vyint[4,1] = _yint1 _yint2 _yint3 _yint4 ;

```

*Déclaration des matrices du système, avec les paramètres optimaux :*

$Q = (\text{\_sigmas}^2 \sim \text{\_rho} * \text{\_sigmas} * \text{\_sigmac})|$

$(\text{\_rho} * \text{\_sigmas} * \text{\_sigmac} \sim \text{\_sigmac}^2);$

$Q = Q * \text{deltat}; \quad Q = \text{Var}[\eta t], \quad \text{matrice de dimension (nbétats*nbétats)}$

$$H = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \times \text{deltat} \qquad H = \text{Var}[\varepsilon_t], \text{ matrice de dimension } (n \times n)$$

*Initialisation du système*

$$a0 = (S0 \sim C0)';^8$$

$$P0 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \qquad \text{Matrice de covariance associée à } a0$$

**Appel de la procédure filtre de Kalman.** Cette procédure utilise les prix à terme observés, et renvoie les prix à terme estimés (y\_cond), la matrice de covariance associée à y (F), la matrice d'innovations (v), la matrice de variables d'état (a), la matrice de covariance aux variables d'état (P), la matrice des espérances conditionnelles des variables d'état (a\_cond), la matrice de covariance associée à a\_cond (P\_cond), et le vecteur des logarithmes des vraisemblances, calculé sur les innovations (logl).

```
{y_cond,v,a,a_cond,P,P_cond,F,logl}=NL_Kalman_filter(y,&Z,&T,&R,a0,P0,H,Q);
end;
```

## 2.PROCEDURES

### 2.1. PROCEDURES UTILISEES POUR LA SIMULATION DES PRIX A TERME

**Procédure calculemat<sup>9</sup> :**

```
PROC(3) = calculemat(tau, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
```

*Variables locales de la procédure*

```
local veclam, vecmu, matcor, matcov, veccov, min, i, L, compteur, tau;
```

*Initialisation*

```
matcor = zeros(((tau/prec)+1), ((tau/prec)+1));
```

```
matcov = zeros(((tau/prec)+1), ((tau/prec)+1));
```

---

<sup>8</sup> Voir la note quatre de cette annexe.

<sup>9</sup> Voir l'annexe cinq, section 4.

*Création d'une séquence de nombres, dont le premier est de valeur 1, le dernier de valeur (tau/prec), avec une incrémentation de 1*

```
compteur = seqa(1, 1, (tau/prec));
veccov = _comp1*(1-exp(- _kappa *E*prec));
veccov = veccov|_comp1*(1-exp(- _kappa * compteur * prec));10
veclam = (1/tau) * veccov;
vecmu = sqrt((_comp2*(1-(exp(-2* _kappa*E*prec))))-(tau*veclam[1]^2));
taui = tau*((veclam[2: (tau/prec)+1])^2);
vecmu = vecmu|sqrt((_comp2*(1-exp(-2* _kappa*compteur*prec))))-(taui));
matcov[1,1] = _comp2*exp(- _kappa*2*E*prec)*(exp(2* _kappa*E*prec)-1);
matcor[1,1] = (1/vecmu[1]^2)).*(matcov[1,1]-((veccov[1]^2)/tau));

i = 2;
do until i>((tau/prec)+1);
    min = seqa(2, 1, i-1)|(i*ones((tau/prec) -i+2,1));
    min = min[1 : (tau/prec)];
    matcov[i,2:(tau/prec)+1]=_comp2*exp(- _kappa*(((i-1)+compteur')*prec)).
        *(exp(2* _kappa*min'*prec)-1);
    matcor[i,]=(1/(vecmu[i]*vecmu')).*(matcov[i,]-((veccov[i]*veccov')/tau));
    i = i+1.
endo;
L = chol(matcor)';
retp(L, veclam, vecmu);
endp;
```

### ***Procédure calculeB :***

```
PROC(1) = calculeB(mat_L, _veclam, _vecmu, _Zs, _ur);
local vecrr, res;
vecrr = mat_L*_ur;
res = _veclam*_Zs+_vecmu.*vecrr;
retp(res);
endp;
```

---

<sup>10</sup> Le trait vertical | permet d'effectuer des concaténations verticales.

**Procédure calculew :**

```
PROC(1) = calculew(tau, prec, _vecb);
local res, y, som;
y = _vecb ;
res = (y[2:(tau/prec)+1,]*prec)-(0,5*prec*(y[2:(tau/prec)+1,]-y[1:(tau/prec),.]));
som = sumc(res);
retp(som);
endp;
```

**Procédure Calculev :**

```
PROC(1) = calculev(tau, _alphap, prec, c, _kappa, _vecb);
local res, y, grandd, som, compteur, z;
compteur = seqa(0,1, (tau/prec)+1);
grandd = _alphap+(c-_alphap)*exp(-_kappa*compteur*prec);
y = _vecb ;
z = y+ grandd ;
y = exp(z) ;
res = (y[2:(tau/prec)+1,]*prec)-(0,5*prec*(y[2:(tau/prec)+1,]-y[1:(tau/prec),.]));
som = sumc(res);
retp(som);
endp;
```

**Procédure Itération :**

```
PROC(1)=Iteration(c,_kappa, _alphap, _beta, tau, prec, _vecb, _yint);
local v, y;
v = Calculev(tau, _alphap, prec, c, _kappa, _vecb);
y = _yint -_beta*v;
y = exp(y);
retp(y);
endp;
```



## 2.2.PROCEDURES UTILISEES POUR LE FILTRE DE KALMAN ETENDU

### 2.2.1. Procédures utilisées pour la simulation dans Deriv\_Z :

Les procédures CalculevP et ItérationP permettent d'obtenir la dérivée, par rapport à la variable d'état C, de l'espérance :  $E[\exp(\sigma_s Z_s - (1 - \beta)W - \beta V)]$  <sup>11</sup>

#### Procédure CalculevP :

```
PROC(1) = CalculevP(tau, _alphap, prec, c, _kappa, _vecb);
local res, y, grandd, som, compteur, z, m;
compteur = seqa(0,1, (tau/prec)+1);
grandd = _alphap+(c-_alphap)*exp(-_kappa*compteur*prec);
y = _vecb ;
m = - _kappa*compteur*prec ;
z = y+grandd +m ;
y = exp(z) ;
res = (y[2:(tau/prec)+1,.]*prec)-(0,5*prec*(y[2:(tau/prec)+1,.]-y[1:(tau/prec),.]));
som = sumc(res);
retp(som);
endp;
```

---

<sup>11</sup> La solution du modèle AS est la suivante :

$$F(t, T) = S(t) \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C(t)) E_t^Q \left[ \exp \left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T (\exp(B(v) + D(v))) dv \right) \right]$$

Avec :

$$A(\tau) = \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \tau + \hat{\alpha} (1 - \beta) (H - \tau) \right) \quad B(v) = \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)$$

$$D(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) e^{-\kappa(v-t)}$$

La dérivée de F(t, T) par rapport à S(t) s'écrit :

$$\frac{\partial F(t, T)}{\partial S} = A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C(t)) E_t^Q \left[ \exp \left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T (\exp(B(v) + D(v))) dv \right) \right]$$

Compte tenu de l'expression D(v), la dérivée de F(t, T) par rapport à C(t) est la suivante :

$$\frac{\partial F(t, T)}{\partial C} = A(\tau) \times (H(\beta - 1)) \times \exp(H(\beta - 1)C(t)) E_t^Q \left[ \exp \left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T (\exp(-\kappa v) \exp(B(v) + D(v))) dv \right) \right]$$

Pour obtenir la dérivée de F(t, T) par rapport à C(t), il faut calculer la dérivée de V, et modifier le calcul de l'espérance en conséquence.

**Procédure ItérationP :**

```
PROC(1)=IterationP(c,_kappa,_alphap,_beta,tau,prec,_vecb,_yint);
local vp, y;
vp = CalculevP(tau,_alphap,prec,c,_kappa,_vecb);
y = _yint -_beta*vp;
y = exp(y);
retp(y);
endp;
```

### 2.2.2. Procédures associées au filtre de Kalman étendu

**Procédure R :** elle renvoie la matrice  $R$ , qui est calculée en fonction des valeurs des variables d'état

```
PROC(1) = R(x);
local s, c, res;
s = x[1];
c = x[2];
res = zeros(2,2);
res = (s~0)|
      (0~1-_beta+_beta*exp(c));
retp(res);
endp;
```

**Procédure T :** elle renvoie le vecteur  $T$ , calculé en fonction des valeurs des variables d'état

```
PROC(1) = T(x);
local s, c, res;
s = x[1];
c = x[2];
res = zeros(2,1);
res[1] = s + s*deltat*(_mu-((1-_beta)*c)-(beta*exp(c)));
```

```
res[2] = _kappa*_alpha*(1-_beta)*deltat
        +c*(1-_beta-( _kappa*deltat*(1-_beta+_beta*exp(c))))
        +_beta*exp(c)*( _kappa*_alpha*deltat+0,5*_sigmac^2*deltat+1);
retp(res);
endp;
```

**Procédure Deriv\_T** : elle renvoie la matrice correspondant aux dérivées du vecteur calculé dans la procédure T, par rapport aux variables d'état

```
PROC(1) = Deriv_T(x);
local s, c, res;
s = x[1];
c = x[2];
res = zeros(2,2);
res =(1+deltat*( _mu-((1-_beta)*c)-(beta*exp(c)))~
        (- (1-_beta)*s*deltat-(s*_beta*exp(c)*deltat)))|
        (0~(1-_beta-( _kappa*deltat*(1-_beta+_beta*exp(c))+_beta*c*exp(c))+
        _beta*exp(c)*( _kappa*_alpha*deltat+0,5*_sigmac^2*deltat+1))));
retp(res);
endp;
```

**Procédure Z** : elle renvoie, pour chaque observation, un vecteur de quatre prix à terme de maturité différente. Ces prix sont calculés dans la procédure Deriv\_Z.

```
PROC(1) = Z(x);
retp(_fp);
endp;
```

**Procédure Deriv\_Z** : elle calcule, pour chaque observation, un vecteur de prix à terme, et renvoie la matrice des dérivées de ces prix par rapport aux variables d'état.

```
PROC(1) = Deriv_Z(x);
local s, c, res, i, ITE, ITEP, tau, _vecb, _yint ;
Initialisation
s = x[1];
c = x[2];
_ITEM = zeros(rows(vectau,1));
```

```
_ITEMP = zeros(rows(vectau,1));
_fa = zeros(rows(vectau),1);
_fp = zeros(rows(vectau),1);
_fsem = zeros(rows(vectau),1);
res = zeros(rows(vectau),2);
```

### *Itération*

```
i = 1;
```

```
do until i>rows(vectau);
```

```
    tau = vectau[i];
```

```
    ITE = zeros(nbsim,1);
```

```
    ITEP = zeros(nbsim, 1) ;
```

*Les vecteurs \_vecb et \_yint dépendent de la valeur de tau et donc de celle de i. Les matrices indexées sont appelées en fonction de la valeur de i.*

```
    _vecb = varget(_vb[i]) ;
```

```
    yint = varget(vyint[i]) ;
```

*Appel des procédures Itération et ItérationP*

```
    ITE = Iteration(c,_kappa, _alphap, _beta, tau, prec, _vecb, _yint);
```

```
    ITEP = IterationP(c,_kappa, _alphap, _beta, tau, prec, _vecb, _yint);
```

*Calcul de l'espérance, et de sa dérivée par rapport à C*

```
    _ITEM[i] = meanc(ITE);
```

```
    _ITEMP[i] = meanc(ITEP) ;
```

```
    i = i+1;
```

```
endo;
```

*Calcul des prix à terme (\_fp) et de leurs dérivées par rapport à S et à C*

```
_fsem[1] = _grandap[1]*exp((_beta-1)*_grandh[1]*c);
```

```
_fsem[2] = _grandap[2]*exp((_beta-1)*_grandh[2]*c);
```

```
_fsem[3] = _grandap[3]*exp((_beta-1)*_grandh[3]*c);
```

```
_fsem[4] = _grandap[4]*exp((_beta-1)*_grandh[4]*c);
```

```
_fa[1] = _fsem[1] * _ITEM[1] ;
```

```
_fa[2] = _fsem[2] * _ITEM[2] ;
```

```
_fa[3] = _fsem[3] * _ITEM[3] ;
```

```

_fa[4] = _fsem[4] * _ITEM[4] ;

_fp = s*_fa;
res = (_fa[1]~s*_fsem[1]*_grandh[1]*(_beta-1)*_ITEMP[1])|
      (_fa[2]~s*_fsem[2]*_grandh[2]*(_beta-1)*_ITEMP[2])|
      (_fa[3]~s*_fsem[3]*_grandh[3]*(_beta-1)*_ITEMP[3])|
      (_fa[4]~s*_fsem[4]*_grandh[4]*(_beta-1)*_ITEMP[4]);
retp(res);
endp;

```

### 2.3.PROCEDURES MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

*Ces procédures sont identiques à celles présentées en annexe sept. Seuls les vecteurs de paramètres sont différents et certaines variables locales sont modifiées.*

**Procédure ml** : elle renvoie le vecteur logl, qui correspond, pour chaque observation, au logarithme de la vraisemblance. Pour cela, elle fait appel à la procédure filtre de kalman étendu et fonction de vraisemblance associée. Elle utilise le vecteur de paramètres passage.

```
PROC(1) = ml(passage);
```

```
local logl, y_cond, v, a, a_cond, P, P_cond, F, vrai, Q, H;
```

*Définition des matrices et des variables locales utilisées pour le filtre de Kalman*

```

_kappa = passage[1]; _mu = passage[2]; _sigmas = passage[3]; _alpha = passage[4];
_sigmac = passage[5]; _rho = passage[6]; _lambda = passage[7]; _beta = passage[8];
_alphap = _alpha - (_lambda/ _kappa);
_grandh = (1 - exp(- _kappa*vectau))/ _kappa;
_grandap = exp((ri-(0,5* _sigmas^2))*vectau)+_alphap*(1-_beta)*(_grandh- vectau);
_comp1 = (1/ _kappa) * _sigmac * _rho;
_comp2 = _sigmac^2/(2* _kappa);

```

```
{mat_L1, _veclam1, _vecmu1} = calculeL(tau1, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
```

```
{mat_L2, _veclam2, _vecmu2} = calculeL(tau2, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
```

```
{mat_L3, _veclam3, _vecmu3} = calculeL(tau3, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
```

```
{mat_L4, _veclam4, _vecmu4} = calculeL(tau4, prec, _kappa, E, _comp1, _comp2);
```

```
_vecb1 = calculeB(mat_L1, _veclam1, _vecmu1, _Zst1, _ur1) ;
```

```
_vecb2 = calculeB(mat_L2, _veclam2, _vecmu2, _Zst2, _ur2) ;
_vecb3 = calculeB(mat_L3, _veclam3, _vecmu3, _Zst3, _ur3) ;
_vecb4 = calculeB(mat_L4, _veclam4, _vecmu4, _Zst4, _ur4) ;
let _vb[4,1] = _vecb1 _vecb2 _vecb3 _vecb4 ;
```

```
_vecw1 = calculew(tau1, prec, _vecb1) ;
_vecw2 = calculew(tau2, prec, _vecb2) ;
_vecw3 = calculew(tau3, prec, _vecb3) ;
_vecw4 = calculew(tau4, prec, _vecb4) ;
```

```
_yint1 = _sigmas*_Zs1 - (1 - _beta)*_vecw1 ;
_yint2 = _sigmas*_Zs2 - (1 - _beta)*_vecw2 ;
_yint3 = _sigmas*_Zs3 - (1 - _beta)*_vecw3 ;
_yint4 = _sigmas*_Zs4 - (1 - _beta)*_vecw4 ;
let _vyint[4,1] = _yint1 _yint2 _yint3 _yint4 ;
```

*Actualisation des matrices du système en fonction de chaque jeu de paramètres :*

```
Q = (_sigmas^2 ~ _rho * _sigmas * _sigmac)|
    (_rho * _sigmas * _sigmac~ _sigmac^2);
Q = Q * deltat;
```

$$H = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix} \times deltat$$

```
a0 = (S0~C0)';
```

$$P0 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

*Appel de la procédure filtre de Kalman étendu et fonction de vraisemblance associée*

```
{y_cond,v,a,a_cond,P,P_cond,F,logl}=NL_Kalman_Filter(y,&Z,&T,&R,a0,P0,H,Q);
retp(logl);
endp;
```

```
PROC _mv(passage);
```

```

local fonction, l;
fonction = _mv _fonction;
local fonction: proc;
l = packr(real(fonction(passage)));
retpl(l);
endp;

PROC _mv _sum _oppose(passage);
local lsum;
l = _mv(passage);
lsum = sumc(l);
retpl(lsum);
endp;

PROC _mv _sum _oppose(passage);
local lsum;
lsum = _mv _sum(passage);
retpl(-lsum);
endp;

PROC(5) = maximum_vraisemblance(f,start);
local f : proc;
local nob, t, k, ddl, param, g, h, covparam, stderr, tsudent, pvalue;
local corparam, name, fmax, gb;
_mv _fonction = &f;
Appel de la procédure optimum
{param, fmax, gb} = optimum(&_mv _sum _oppose, start);
fmax = -fmax;
Estimation de la matrice de covariance des paramètres par la matrice jacobienne
g = gradp(&_mv, param);
covparam=invpd(g'g);
_information = g'g;
stderr = sqrt(diag(covparam));
corparam = covparam./stderr./stderr';

```

```
tstudent = param./stderr;
pvalue = 2*cdftc(abs(tstudent),ddl);
retp(param, stderr, covparam, g, fmax);
endp;
```

## 2.4.PROCEDURE FILTRE DE KALMAN ETENDU ET FONCTION DE VRAISEMBLANCE ASSOCIEE<sup>12</sup>

*Les commentaires nécessaires à la compréhension de cette procédure sont identiques à ceux présentés en annexe sept. Ils ne sont donc pas repris ici.*

```
PROC(8) = NL _Kalman_Filter(y, &Z, &T, &R, a0, P0, H, Q);
local Z: proc, T:proc, R:proc;
local Deriv_Z, Deriv_T;
local nobs, n, at, at_1, Pt, Pt_1, m, g, y_cond, v, a_cond;
local a, P_cond, P, F, i;
local yt, Zt, Tt, Rt, Ht, Qt;
local oldtrap, erreur;
local Ft, inv_Ft, yt_1,vt, logl, dFt;

nobs =rows(y); n= cols(y); at=a0; at_1 = a0; Pt = P0; Pt_1 = P0; logl = zeros(nobs,1);
m = rows(Q);

y_cond=zeros(nobs,n);v = zeros(nobs, n);a_cond=zeros(nobs,m);
a = zeros(nobs,m);P_cond=zeros(nobs, m*m);P = zeros(nobs, m*m);
F = zeros(nobs, n*n);
Ht = H;
Qt = Q;

if _NLKF _Deriv _Z /=0;
    Deriv_Z = _NLKF _Deriv _Z;
    local Deriv_Z: proc;
endif;

if _NLKF _Deriv _T /=0;
```

---

<sup>12</sup> Cette procédure est issue de Roncalli T., 1995 : « Introduction à la programmation sous Gauss », Editions Ritme Informatique.



```

Deriv_T = _NLKF_Deriv_T;
local Deriv_T :proc;
endif;
i = 1;
do until i> nobs;
    yt = y[i,.]';
    Rt = R(at);
    if _NLKF_Deriv_T ==0;
        Tt = gradp(&T, at);
    else;
        Tt = Deriv_T(at);
    endif;

    Equations de prediction
    at_1 = T(at) ;
    Pt_1 = Tt*Pt*Tt' + Rt*Qt*Rt';
    if _NLKF_Deriv_Z ==0;
        Zt = gradp(&Z, at_1);
    else;
        Zt = Deriv_Z(at_1);
    endif;

    Innovations
    yt_1 = Z(at_1) ;
    vt = yt - yt_1;

    Equations de remise à jour
    Ft = Zt*Pt_1*Zt' + Ht;
    oldtrap = trapchk(1);
    trap 1, 1;
    inv_Ft = invpd(Ft);
    trap oldtrap, 1;
    erreur = scalerr(inv_Ft);
    if erreur;
        if Ft == zeros(n, n);

```

```

        inv_Ft = Ft;
    else;
        inv_Ft = pinv(Ft);
    endif;
endif;
at = at_1 + Pt_1*Zt'*inv_Ft*vt;
Pt = Pt_1 - Pt_1*Zt'*inv_Ft*Zt*Pt_1;
Stockage des résultats à chaque itération
y_cond[i,] = yt_1';
v[i,] = vt';
a[i,] = at';
a_cond[i,] = at_1';
P[i,] = vecr(Pt)';
P_cond[i,] = vecr(Pt_1)';
F[i,] = vecr(Ft)';
Vraisemblance
if Ft == zeros(n,n);
    dFt = 0;
else;
    dFt = det(Ft);
endif;
if _kalman_logl_correction == 1;
    dFt = dFt*(dFt.>0) + (1e-10)*(dFt.<=0);
endif;
logl[i] = -(n/2) * ln(2*pi) - 0.5*ln(dFt) - 0.5*vt'*inv_Ft*vt;
i = i+1 ;
endo;
retp(y_cond, v, a, a_cond, P, P_cond, F, logl);
endp;

```

## ANNEXE 9 : METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE UTILISEE POUR LE MODELE MR<sup>1</sup>

Cette annexe présente la méthode numérique utilisée pour valoriser les options réelles associées au modèle MR. L'équation aux dérivées partielles de ce modèle est en premier lieu discrétisée (1), pour lui appliquer ensuite une méthode aux directions alternées (2). La troisième section est consacrée au programme employé pour déterminer de façon récursive la valeur des options.

La valeur de l'option d'investissement du modèle MR,  $V(S, C, \tau)$  satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 V_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_C^2 V_{CC} + \rho \sigma_S \sigma_C S V_{SC} + S(r - C) V_S + [\kappa(\hat{\alpha} - C)] V_C - V_\tau - rV = 0 \quad (\text{MR16})$$

$$\text{Avec } \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

$$\text{Sous la condition aux bornes : } V(S, C, T, T) = \max[VAN(S, C, T, T), 0] \quad (\text{MR17})$$

A l'échéance  $T$ , si la valeur actuelle nette (VAN) de l'investissement est négative ou nulle, la valeur de l'option est nulle. Si en revanche la VAN est positive, la valeur de l'option est égale à cette dernière. On considère de plus que l'investissement peut avoir lieu à toute date comprise entre la date présente  $t$  et la date d'expiration de l'option  $T$ . L'actif valorisé peut donc être identifié à une option d'achat américaine<sup>2</sup>.

Cette équation est résolue numériquement à l'aide d'une méthode aux différences finies : ses dérivées partielles sont remplacées par des approximations

---

<sup>1</sup> Cette résolution numérique est inspirée de celle proposée par M. Bellalah, 1990.

<sup>2</sup> Une option d'achat (*call*) américaine peut être exercée à tout moment.

obtenues à l'aide de développements de Taylor. Parmi les méthodes aux différences finies, celle de Crank-Nicholson a été retenue pour la stabilité de ses solutions<sup>3</sup>.

## 1. METHODE DE DISCRETISATION

La résolution numérique repose sur un processus de discrétisation portant à la fois sur les valeurs des variables d'état  $S$  et  $C$  et sur le temps à parcourir avant l'échéance  $T$ . Le temps à parcourir avant l'échéance,  $\tau = (T - t)$ , est divisé en  $nn$  intervalles de longueur  $k$ . L'option est calculée à la date  $(s - k)$  de façon récursive comme une fonction de sa valeur à l'instant  $s$  avec  $t \leq s \leq T$ . L'instant  $s = T$  correspond à la date d'expiration de l'option. Le domaine de variation des variables d'état  $S$  et  $C$  est divisé en  $m$  intervalles de longueur  $h$ . La grille est constituée des points  $(ih, jh, nk)$  dans l'espace  $(S, C, t)$  tels que :

$$S = ih \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq m$$

$$C = jh \quad \text{pour} \quad -m/2 \leq j \leq m/2^4$$

$$t = nk \quad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq nn$$

La valeur de l'option est représentée par un schéma à trois dimensions :  $V(S, C, t) = V(ih, jh, nk) = V^n(i, j) = U^n(i, j)$ . Plus  $m$  et  $nn$  sont élevés, plus les solutions numériques du système discret sont proches de la solution réelle de l'équation.

### 1.1. APPROXIMATION DES DERIVEES PARTIELLES :

Les approximations sont obtenues en appliquant la formule de Taylor autour des points  $i, j$ , et  $k$ .

---

<sup>3</sup>Un système est stable si les erreurs d'arrondis survenant lors du calcul des solutions numériques n'augmentent pas à chaque itération. Les schémas de Crank-Nicholson sont inconditionnellement stables.

<sup>4</sup> Le *convenience yield* peut être négatif, ce qui n'est pas le cas du prix au comptant.

### 1.1.1. Dérivées premières

Appliquée autour du point i, la formule de Taylor donne :

$$U^n(i+1, j) = U^n(i, j) + \frac{\delta U^n}{\delta S} h + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta S^2} h^2 + \dots \quad (a)$$

On peut donc approcher  $\frac{\delta U^n}{\delta S}$  par le rapport :  $\frac{U^n(i+1, j) - U^n(i, j)}{h}$  avec une erreur de l'ordre de  $h^2$ . Cette approximation est qualifiée de *forward* : elle est réalisée en partant du point (i+1), situé « en avant » du point i considéré.

De façon analogue, on a :

$$U^n(i-1, j) = U^n(i, j) - \frac{\delta U^n}{\delta S} h + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta S^2} h^2 + \dots \quad (b)$$

et une seconde approximation pour la dérivée première par rapport à S est alors :  $\frac{U^n(i, j) - U^n(i-1, j)}{h}$ , avec une erreur de l'ordre de  $h^2$ . Cette approximation est qualifiée de *backward*, car elle est réalisée à partir du point (i - 1) situé avant le point i considéré.

La soustraction terme à terme des équations (a) et (b) permet d'obtenir la dérivée première par rapport à S avec une erreur d'approximation de l'ordre de  $h^3$  :

$$\frac{U^n(i+1, j) - U^n(i-1, j)}{2h}$$

Dans ce cas, l'approximation est centrée autour du point i. La même démarche, appliquée au point j, permet d'obtenir l'approximation centrée de la dérivée première par rapport à C.

La dérivée première par rapport au temps est écrite en considérant un demi-intervalle de temps :  $\frac{\delta U^n(i, j)}{\delta t} = \frac{U^n(i, j) - U^{n-1/2}(i, j)}{\frac{k}{2}}$

L'erreur d'approximation est d'ordre  $k^2$ .

### 1.1.2. Dérivées seconde et croisée

L'approximation pour la dérivée partielle seconde est exprimée de la façon suivante :

$$\frac{U^n(i+1, j) - 2U^n(i, j) + U^n(i-1, j))}{h^2}$$

avec une erreur de l'ordre de  $h^4$ . Là encore, cette approximation est centrée autour du point  $i$ . Les dérivées premières et secondes par rapport à  $C$  sont approchées de la même façon, en faisant varier  $j$  et non plus  $i$ .

L'obtention de la dérivée croisée par rapport à  $C$  et à  $S$  exige de faire varier simultanément  $i$  et  $j$  :

$$U^n(i+1, j+1) = U^n(i, j) + \frac{\delta U^n}{\delta S} h + \frac{\delta U^n}{\delta C} h + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta S^2} h^2 + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta C^2} h^2 + \frac{\delta^2 U^n}{\delta S \delta C} h^2 + \dots \quad (c)$$

$$U^n(i-1, j-1) = U^n(i, j) - \frac{\delta U^n}{\delta S} h - \frac{\delta U^n}{\delta C} h + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta S^2} h^2 + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta C^2} h^2 + \frac{\delta^2 U^n}{\delta S \delta C} h^2 - \dots \quad (d)$$

$$U^n(i+1, j-1) = U^n(i, j) + \frac{\delta U^n}{\delta S} h - \frac{\delta U^n}{\delta C} h + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta S^2} h^2 + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta C^2} h^2 - \frac{\delta^2 U^n}{\delta S \delta C} h^2 + \dots \quad (e)$$

$$U^n(i-1, j+1) = U^n(i, j) - \frac{\delta U^n}{\delta S} h + \frac{\delta U^n}{\delta C} h + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta S^2} h^2 + \frac{\delta^2 U^n}{2\delta C^2} h^2 - \frac{\delta^2 U^n}{\delta S \delta C} h^2 - \dots \quad (f)$$

La combinaison de ces différents termes, [(c) + (d) - (e) - (f)], permet d'obtenir une approximation centrée pour la dérivée croisée par rapport à  $S$  et à  $C$  :

$$\frac{\delta^2 U^n(i, j)}{\delta S \delta C} = \frac{U^n(i+1, j+1) - U^n(i+1, j-1) - U^n(i-1, j+1) + U^n(i-1, j-1))}{4h^2}$$

L'erreur d'approximation est de l'ordre de  $h^4$ .

A chaque période  $s = T - nk$ , les dérivées du premier ordre et du second ordre par rapport à  $S$  et à  $C$ , ainsi que la dérivée par rapport au temps sont donc les suivantes :

$$\frac{\delta U^n(i, j)}{\delta S} = \frac{U^n(i+1, j) - U^n(i-1, j))}{2h}$$

$$\frac{\delta U^n(i, j)}{\delta C} = \frac{U^n(i, j+1) - U^n(i, j-1)}{2h}$$

$$\frac{\delta^2 U^n(i, j)}{\delta S^2} = \frac{U^n(i+1, j) - 2U^n(i, j) + U^n(i-1, j)}{h^2}$$

$$\frac{\delta^2 U^n(i, j)}{\delta C^2} = \frac{U^n(i, j+1) - 2U^n(i, j) + U^n(i, j-1)}{h^2}$$

$$\frac{\delta^2 U^n(i, j)}{\delta S \delta C} = \frac{U^n(i+1, j+1) - U^n(i+1, j-1) - U^n(i-1, j+1) + U^n(i-1, j-1)}{4h^2}$$

$$\frac{\delta U^n(i, j)}{\delta t} = \frac{U^n(i, j) - U^{n-1/2}(i, j)}{\frac{k}{2}}$$

On pose les opérateurs différentiels suivants, agissant sur les variables indicées :

$$\delta_S^2 U^n(i, j) = [U^n(i+1, j) - 2U^n(i, j) + U^n(i-1, j)]$$

$$\delta_C^2 U^n(i, j) = [U^n(i, j+1) - 2U^n(i, j) + U^n(i, j-1)]$$

$$\delta_S U^n(i, j) = [U^n(i+1, j) - U^n(i-1, j)]$$

$$\delta_C U^n(i, j) = [U^n(i, j+1) - U^n(i, j-1)]$$

$$\begin{aligned} \delta_S \delta_C U^n(i, j) &= \delta_S [U^n(i, j+1) - U^n(i, j-1)] \\ &= [U^n(i+1, j+1) - U^n(i+1, j-1) - U^n(i-1, j+1) + U^n(i-1, j-1)] \end{aligned}$$

## 1.2. APPROXIMATION DE L'EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES

En remplaçant les dérivées par leur approximation dans l'équation (MR16), on obtient, pour chaque instant  $s = T - \left(n - \frac{1}{2}\right)k$ , aux points  $S = ih$  et  $C = jh$ ,

l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\sigma_s^2 i^2}{2} \delta_S^2 + \frac{\sigma_C^2}{2h^2} \delta_C^2 + \frac{i\rho\sigma_s\sigma_C}{4h} \delta_S \delta_C + \frac{i(r-jh)}{2} \delta_S + \frac{\kappa(\bar{\alpha}-jh)}{2h} \delta_C - r \right\} U^n(i, j) \\ &= \frac{2}{k} \{ U^n(i, j) - U^{n-1/2}(i, j) \} \end{aligned}$$

⇒

$$\left\{ \frac{\sigma_s^2 i^2 k}{4} \delta_s^2 + \frac{\sigma_c^2 k}{4h^2} \delta_c^2 + \frac{\rho i \sigma_s \sigma_c k}{8h} \delta_s \delta_c + \frac{ik(r-jh)}{4} \delta_s + \frac{k(\kappa(\bar{\alpha}-jh))}{4h} \delta_c - \frac{rk}{2} - 1 \right\} U^n(i, j) = -U^{n-1/2}(i, j)$$

ou encore

$$\left\{ \frac{\sigma_s^2 i^2 k}{4} \delta_s^2 + \frac{\sigma_c^2 k}{4h^2} \delta_c^2 + \frac{\rho i \sigma_s \sigma_c k}{8h} \delta_s \delta_c + \frac{ik(r-jh)}{4} \delta_s + \frac{k(\kappa(\bar{\alpha}-jh))}{4h} \delta_c - \frac{rk}{2} - 1 \right\} U^{n-1/2}(i, j) = -U^{n-1}(i, j)$$

⇒  $z U^{n-1/2}(i, j) = -U^{n-1}(i, j)$

Par ailleurs, on a la relation :  $U^{n-1/2}(i, j) = \frac{U^{n-1}(i, j) + U^n(i, j)}{2}$

⇒

$$(z+2)U^{n-1}(i, j) = -zU^n(i, j)$$

En remplaçant z par sa valeur, on obtient le système d'équations :

$$\left\{ \frac{\sigma_s^2 i^2 k}{4} \delta_s^2 + \frac{\sigma_c^2 k}{4h^2} \delta_c^2 + \frac{\rho i \sigma_s \sigma_c k}{8h} \delta_s \delta_c + \frac{ik(r-jh)}{4} \delta_s + \frac{k(\kappa(\bar{\alpha}-jh))}{4h} \delta_c + 1 - \frac{rk}{2} \right\} U^{n-1}(i, j) = - \left\{ \frac{\sigma_s^2 i^2 k}{4} \delta_s^2 + \frac{\sigma_c^2 k}{4h^2} \delta_c^2 + \frac{\rho i \sigma_s \sigma_c k}{8h} \delta_s \delta_c + \frac{ik(\mu-jh)}{4} \delta_s + \frac{k(\kappa(\bar{\alpha}-jh))}{4h} \delta_c - 1 - \frac{rk}{2} \right\} U^n(i, j)$$

Le schéma de Crank-Nicholson centré en espace peut encore être écrit de la façon suivante :

$$\left\{ T + V\delta_s^2 + W\delta_c^2 + X\delta_s\delta_c + Y\delta_s + Z\delta_c \right\} U^{n-1}(i, j) = \left\{ 1 - V\delta_s^2 - W\delta_c^2 - X\delta_s\delta_c - Y\delta_s - Z\delta_c \right\} U^n(i, j) \quad (R1)$$

Avec :

$$V = \frac{\sigma_s^2 i^2 k}{4R}$$

$$W = \frac{\sigma_c^2 k}{4h^2 R}$$

$$X = \frac{i\rho\sigma_s\sigma_c k}{8hR}$$

$$Y = \frac{ik(r-jh)}{4R}$$

$$Z = \frac{k(\kappa(\bar{\alpha}-jh))}{4hR}$$

$$T = \frac{2-rk}{2R}$$

$$R = \frac{2+rk}{2}$$

pour

$$1 \leq i \leq m-1 \text{ et}$$

$$-(m/2)+1 \leq j \leq (m/2)+1$$

A partir ce schéma, une méthode de type *Alternative Direction Implicit* (ADI, ou Directions Alternées) est appliquée. Celle-ci consiste à introduire un terme



intermédiaire pour séparer, à chaque pas de temps, le système d'équations (R1) en deux sous-systèmes d'équations. Chacun de ces deux sous-systèmes permettra de déterminer un système tridiagonal correspondant à une dimension de l'espace<sup>5</sup> (d'où le nom de cette méthode : Directions Alternées). Ces deux sous-systèmes seront successivement résolus pour chaque pas de temps.

## 2. METHODE AUX DIRECTIONS ALTERNEES

Un schéma de type ADI pour les équations paraboliques est utilisé. Celui-ci exige la résolution de deux systèmes d'équations tridiagonaux à chaque pas de temps, est utilisé. Le premier système est résolu pour  $i$  fixé, le second système est résolu pour  $j$  fixé. Le schéma de l'ADI employé s'inspire de celui proposé par Mitchell et Mc Kee en 1970. Il permet de résoudre l'équation parabolique suivante :

$$\frac{\delta u}{\delta t} = Lu$$

$$\text{Avec : } L \equiv a(x, y, t) \frac{\delta^2}{\delta x^2} + 2b(x, y, t) \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} + c(x, y, t) \frac{\delta^2}{\delta y^2}$$

Ce schéma présente l'avantage d'autoriser la résolution de l'équation parabolique en deux phases malgré la présence d'une dérivée croisée.

En utilisant une méthode de séparation proche de celle proposée par Douglas et Rachford (1956), le terme intermédiaire  $U^{n-1/2}(i, j)$  au point  $\left(n - \frac{1}{2}\right)$ , est défini de telle sorte que :

$$\left[1 - V\delta_s^2 - Y\delta_s\right]U^n(i, j) = U^{n-1/2}(i, j) - \left[Y\delta_s + V\delta_s^2\right]U^{n-1}(i, j) \quad (R2)$$

L'expression (R2) est le premier sous-système d'équations dérivé du système (R1). Il a pour caractéristique de permettre le traitement de  $U^n$  sur la dimension  $i$ . Le premier sous-système (R2) est ensuite manipulé pour obtenir le second sous-système d'équations dérivé de (R1). Ce second sous-système doit être tel qu'en éliminant le terme intermédiaire  $U^{n-1/2}(i, j)$  dans chacun des sous-systèmes, on puisse revenir au système (R1).

L'expression (R2) est multipliée par  $[1 - W\delta_C^2 - Z\delta_C]$  :

$$\boxed{\begin{aligned} & [1 - V\delta_s^2 - Y\delta_s][1 - W\delta_C^2 - Z\delta_C]U^n(i, j) = \\ & U^{n-1/2}(i, j)[1 - W\delta_C^2 - Z\delta_C] - [1 - W\delta_C^2 - Z\delta_C][Y\delta_s + V\delta_s^2]U^{n-1}(i, j) \end{aligned}} \quad (R3)$$

Dans un schéma de Crank-Nicholson, les erreurs d'approximation sont d'ordre 2. On peut donc considérer que tous les termes d'ordre supérieur à 2 sont nuls. En particulier :

$$\delta_s^2 \delta_C \{U^n(i, j) - U^{n-1}(i, j)\} = 0$$

$$\delta_C^2 \delta_s \{U^n(i, j) - U^{n-1}(i, j)\} = 0$$

$$\delta_C \delta_s^2 \{U^n(i, j) - U^{n-1}(i, j)\} = 0$$

$$\delta_s \delta_C \{U^n(i, j) - U^{n-1}(i, j)\} = \delta_s \delta_C \left\{ \frac{k}{2} \frac{\partial U^n(i, j)}{\partial t} - \frac{k}{2} \frac{\partial U^{n-1}(i, j)}{\partial t} \right\} = 0$$

En introduisant dans le terme de gauche de l'équation (R1), le terme suivant, dont chaque élément est d'ordre supérieur à 2 :

$$\left\{ (X + YZ)\delta_s \delta_C + VW\delta_s^2 \delta_C^2 + VZ\delta_s^2 \delta_C + YW\delta_s \delta_C^2 \right\} \{U^n(i, j) - U^{n-1}(i, j)\}$$

le système suivant est obtenu :

$$\boxed{\begin{aligned} & \{1 - V\delta_s^2 - W\delta_C^2 - Y\delta_s - Z\delta_C + YZ\delta_s \delta_C + VW\delta_C^2 \delta_s^2 + VZ\delta_s^2 \delta_C + YW\delta_C^2 \delta_s\} U^n(i, j) \\ & = \{T + V\delta_s^2 + W\delta_C^2 + 2X\delta_s \delta_C + Y\delta_s + Z\delta_C + YZ\delta_s \delta_C + VW\delta_C^2 \delta_s^2 + VZ\delta_s^2 \delta_C + YW\delta_C^2 \delta_s\} U^{n-1}(i, j) \end{aligned}} \quad (R4)$$

Ce système (R4) n'est rien d'autre que le système (R1), augmenté de termes nuls.

En soustrayant l'équation (R3) de l'équation (R4), il vient :

$$\boxed{\begin{aligned} 0 = & -\{1 - W\delta_C^2 - Z\delta_C\} U^{n-1/2}(i, j) \\ & + \{1 - W\delta_C^2 - Z\delta_C\} \{Y\delta_s + V\delta_s^2\} U^{n-1}(i, j) \\ & + \{T + V\delta_s^2 + W\delta_C^2 + 2X\delta_s \delta_C + Y\delta_s + Z\delta_C + YZ\delta_s \delta_C + VW\delta_s^2 \delta_C^2 + VZ\delta_s^2 \delta_C + YW\delta_C^2 \delta_s\} U^{n-1}(i, j) \end{aligned}}$$

Cette soustraction a permis d'éliminer le terme en  $U^n$ . En simplifiant l'expression ci-dessus, le second sous-système d'équations cherché est obtenu :

---

<sup>5</sup> Dans notre cas, les deux dimensions dans l'espace sont i et j. La dimension en temps est k.

$$\boxed{\begin{aligned} (1 - W\delta_C^2 - Z\delta_C)U^{n-1/2}(i, j) = \\ (T + 2V\delta_S^2 + W\delta_C^2 + 2X\delta_S\delta_C + 2Y\delta_S + Z\delta_C)U^{n-1}(i, j) \end{aligned}} \quad (R5)$$

Ce sous-système permet, pour chaque valeur de  $i$  fixée, de calculer  $U$  en faisant varier  $j$ .

On a par ailleurs défini le sous-système d'équations (R2) :

$$\boxed{[1 - V\delta_S^2 - Y\delta_S]U^n(i, j) = U^{n-1/2}(i, j) - [Y\delta_S + V\delta_S^2]U^{n-1}(i, j)}$$

Ce dernier permet, pour chaque valeur de  $j$  fixée, de calculer  $U$  en faisant varier  $i$ .

L'expression (R5) permet d'obtenir les valeurs  $U$  au temps  $\left(n - \frac{1}{2}\right)$ , en fonction des valeurs de  $U$  au temps  $(n-1)$  ; l'expression (R2) permet d'obtenir les valeurs de  $U$  au temps  $n$ , en fonction des valeurs de  $U$  aux temps  $(n-1)$  et  $\left(n - \frac{1}{2}\right)$ .

Dans l'algorithme de résolution, le sous-système (R5) doit donc intervenir avant (R2), puisqu'il permet d'obtenir des valeurs utilisées pour déterminer (R2).

Enfin, on peut vérifier rapidement que la résolution des deux systèmes d'équations (R2) et (R5), en éliminant le terme  $U^{n-1/2}(i, j)$  et les termes nuls, permet de revenir au système d'équations (R1).

## 2.1. PREMIERE PHASE DE LA RESOLUTION

La première phase de la résolution numérique correspond au sous-système (R5). En remplaçant les opérateurs numériques par leur valeur dans l'expression (R5)

et en isolant les termes en  $\left(n - \frac{1}{2}\right)$  d'un seul côté, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} U^{n-1/2}(i, j) - W(U^{n-1/2}(i, j+1) - 2U^{n-1/2}(i, j) + U^{n-1/2}(i, j-1)) - Z(U^{n-1/2}(i, j+1) - U^{n-1/2}(i, j-1)) = \\ U^{n-1}(i, j)(T - 4V - 2W) + U^{n-1}(i+1, j)(2V + 2Y) + U^{n-1}(i-1, j)(2V - 2Y) + U^{n-1}(i, j+1)(W + Z) \\ + U^{n-1}(i, j-1)(W - Z) + 2X(U^{n-1}(i+1, j+1) - U^{n-1}(i-1, j+1) - U^{n-1}(i+1, j-1) + U^{n-1}(i-1, j-1)) \end{aligned}}$$

Ce qui peut être écrit sous la forme d'un système tridiagonal :

$$a(i, j)U^{n-1/2}(i, j-1) + b(i, j)U^{n-1/2}(i, j) + c(i, j)U^{n-1/2}(i, j+1) = d(i, j)$$

Avec :

$$a(i, j) = Z - W$$

$$b(i, j) = 1 + 2W$$

$$c(i, j) = -Z - W$$

$$\begin{aligned} d(i, j) = & U^{n-1}(i, j)(T - 4V - 2W) + U^{n-1}(i+1, j)(2V + 2Y) + U^{n-1}(i-1, j)(2V - 2Y) \\ & + U^{n-1}(i, j+1)(W + Z) + U^{n-1}(i, j-1)(W - Z) \\ & + 2X(U^{n-1}(i+1, j+1) - U^{n-1}(i-1, j+1) - U^{n-1}(i+1, j-1) + U^{n-1}(i-1, j-1)) \end{aligned}$$

En  $(n-1/2)$ , on obtient ainsi une relation entre 3 valeurs de  $U^{n-1/2}$  situées autour de  $j$ , pour  $i$  fixé. Ces 3 valeurs de  $U^{n-1/2}$  autour de  $j$  sont exprimées en fonction de la valeur passée  $U^{n-1}$ . La relation est implicite : les valeurs de  $U^{n-1/2}$  ne peuvent être identifiées séparément, ni obtenues explicitement à partir de cette valeur passée.

L'écriture matricielle de ce système, à chaque pas de temps  $n$  et pour chaque valeur de  $i$  fixée, est la suivante :  $M_j U^{n-1/2} = d_{i,j}$  où  $M$  est une matrice tridiagonale<sup>6</sup> affectée des coefficients  $a(j)$ ,  $b(j)$ ,  $c(j)$  sur chacune de ses trois diagonales,  $U^{n-1/2}$  et  $d$  sont des vecteurs. Chaque vecteur  $d$  est exprimé à partir des valeurs passées  $U^{n-1}$ .

Les valeurs des vecteur  $U^{n-1/2}$  sont obtenues en résolvant le système :

$$U^{n-1/2} = M_j^{-1} d_{i,j}$$

## 2.2. SECONDE PHASE DE LA RESOLUTION

La seconde phase de la résolution consiste à résoudre le sous-système suivant :

$$\left[1 - V\delta_S^2 - Y\delta_S\right]U^n(i, j) = U^{n-1/2}(i, j) - \left[Y\delta_S + V\delta_S^2\right]U^{n-1}(i, j) \quad (R2)$$

En remplaçant chacun des opérateurs par sa valeur, on peut écrire :

---

<sup>6</sup> Matrice tridiagonale : seuls les éléments de la diagonale, de la diagonale supérieure, et de la diagonale inférieure de la matrice sont non nuls. On peut donc stocker ce type de matrice sous forme de trois vecteurs.

$$U^n(i, j)(1 + 2V) + U^n(i + 1, j)(-V - Y) + U^n(i - 1, j)(-V + Y) = U^{n-1/2}(i, j) + U^{n-1}(i + 1, j)(-Y - V) + U^{n-1}(i, j)(2V) + U^{n-1}(i - 1, j)(-V + Y)$$

On obtient alors un second système tridiagonal :

$$a'(i, j)U^n(i - 1, j) + b'(i, j)U^n(i, j) + c'(i, j)U^n(i + 1, j) = d'(i, j)$$

Avec :

$$a'(i, j) = Y - V$$

$$b'(i, j) = 1 + 2V$$

$$c'(i, j) = -V - Y$$

$$d'(i, j) = U^{n-1/2}(i, j) + U^{n-1}(i + 1, j)(-Y - V) + U^{n-1}(i, j)(2V) + U^{n-1}(i - 1, j)(-V + Y)$$

En  $n$ , une relation entre 3 valeurs de  $U^n$  situées autour de  $i$  pour  $j$  fixé est ainsi obtenue. Ces trois valeurs sont exprimées en fonction des valeurs passées  $U^{n-1/2}$ , calculées au cours de la première phase de la résolution, et des valeurs  $U^{n-1}$ .

L'écriture matricielle de ce système, à chaque pas de temps et pour chaque valeur de  $j$  fixée, est la suivante :  $M_i U^n = d'_{i,j}$

où  $M_i$  est une matrice tridiagonale affectée des coefficients  $a'(i, j)$ ,  $b'(i, j)$ ,  $c'(i, j)$  sur chacune de ses diagonales,  $U^n$  et  $d'$  sont des vecteurs. Les vecteurs  $d'$  sont exprimés en fonction des valeurs de  $U^{n-1/2}$ , calculées au cours de la première étape, et des valeurs de  $U^{n-1}$ .

Les valeurs des vecteurs  $U^n$  sont obtenues en résolvant le système :

$$U^n = M_i^{-1} d'_{i,j}$$

### 2.3. ETUDE DES CONDITIONS AUX BORNES

L'approximation des équations de valorisation des options des modèles MR et AS, a permis d'obtenir le système suivant :

$$\{T + V\delta_s^2 + W\delta_c^2 + X\delta_s\delta_c + Y\delta_s + Z\delta_c\}U^{n-1}(i, j) = \{1 - V\delta_s^2 - W\delta_c^2 - X\delta_s\delta_c - Y\delta_s - Z\delta_c\}U^n(i, j)$$

(R1)

Avec :

$$V = \frac{\sigma_s^2 i^2 k}{4R} \quad W = \frac{\sigma_c^2 k}{4h^2 R} \quad X = \frac{i\rho\sigma_s\sigma_c k}{8hR}$$

$$Y = \frac{ik(r-jh)}{4R} \quad Z = \frac{k(\kappa(\hat{\alpha}-jh))}{4hR} \quad T = \frac{2-rk}{2R}$$

$$R = \frac{2+rk}{2}$$

pour  $1 \leq i \leq m-1$  et  $-(m/2)+1 \leq j \leq (m/2)-1$

La condition frontière lorsque l'option parvient à expiration est la suivante :

$V(S, C, T, T) \geq \max[VAN(S, C), 0]$  : lorsque l'option parvient à son échéance, sa valeur est soit nulle, soit supérieure ou égale à la valeur nette présente du gisement.

L'utilisation d'une méthode aux différences finies implicite nécessite la formulation de conditions aux limites supplémentaires : il faut exprimer les conditions de ce système d'équations aux limites de S et de C à chaque pas de temps. Pour toute échéance  $\tau$ , on pose les conditions suivantes :

- $V(0, C, \tau) = 0$  : la valeur de l'option est nulle lorsque le prix au comptant s'annule.
- $V_S(m, C, \tau) = 1$  : lorsque la valeur du prix au comptant tend vers sa valeur maximale, la dérivée par rapport au prix au comptant de l'option est égale à 1.
- $V(S, m/2, \tau) = 0$  : lorsque le *convenience yield* atteint sa valeur maximale, une baisse du prix au comptant est anticipée. La valeur de l'option tend vers 0.
- $V(S, -m/2, \tau) = +\infty$  : un *convenience yield* faible indique que les prix au comptant vont avoir tendance à augmenter. La valeur de l'option tend vers l'infini.

Le fait que l'option considérée soit de type américain conduit à introduire une condition supplémentaire, qui doit également être vérifiée à tout pas de temps :

- $V(S, C, \tau) = \max [V(S, C, \tau), VAN(S, C)]$  : l'option peut être exercée dès que sa valeur est supérieure à celle de la valeur nette présente de l'investissement.

La condition sur la dérivée de la valeur de l'option par rapport au prix au comptant,  $V_S(m, C, \tau) = 1$  nécessite un traitement spécial. Cette valeur peut être approchée au point  $i = m$  par un schéma explicite décentré :

$$\frac{1}{2h} \{U^n(m-2, j) - 4U^n(m-1, j) + 3U^n(m, j)\} = 1$$

$\Rightarrow$

$$2h + 4U^n(m-1, j) - 3U^n(m, j) = U^n(m-2, j)$$

Cette expression est combinée avec le schéma en  $i = m-1$  afin de conserver la structure tridiagonale du système. Le schéma en  $i = m-1$  est le suivant :

$$a(m-1, j)U^n(m-2, j) + b(m-1, j)U^n(m-1, j) + c(m-1, j)U^n(m, j) = d(m-1, j)$$

$\Leftrightarrow$

$$b(m-1, j)U^n(m-1, j) + c(m-1, j)U^n(m, j) = d(m-1, j) - a(m-1, j)U^n(m-2, j)$$

En remplaçant  $U^n(m-2)$  par sa valeur, on obtient :

$$\boxed{b(m-1, j)U^n(m-1, j) + c(m-1, j)U^n(m, j) = d(m-1, j) - a(m-1, j)[2h + 4U^n(m-1, j) - 3U^n(m, j)]}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{b(m-1, j)U^n(m-1, j) + c(m-1, j)U^n(m, j) = d(m-1, j) - 2ha(m-1, j) - 4a(m-1, j)U^n(m-1, j) + 3a(m-1, j)U^n(m, j)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{[b(m-1, j) + 4a(m-1, j)]U^n(m-1, j) + [c(m-1, j) - 3a(m-1, j)]U^n(m, j) = d(m-1, j) - 2ha(m-1, j)}$$

Les coefficients  $a(i, j)$ ,  $b(i, j)$ ,  $c(i, j)$  et  $d(i, j)$  ont donc les valeurs suivantes au point  $i = m$  :

$$a(m, j) = b(m-1, j) + 4a(m-1, j)$$

$$b(m, j) = c(m-1, j) - 3a(m-1, j)$$

$$c(m, j) = 0$$

$$d(m, j) = d(m-1, j) - 2ha(m-1, j)$$

### 3. PROGRAMME PERMETTANT DE VALORISER LES OPTIONS ASSOCIEES AU MODELE MR.

L'objectif du programme est de calculer la valeur de l'option d'investissement associée au modèle MR pour un prix au comptant  $S$ , un *convenience yield*  $C$  et un vecteur de paramètres donnés.

#### 3.1. STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME

La structure générale du programme est la suivante :

- Initialisation : elle permet de fixer les valeurs des paramètres du modèle, les valeurs des variables d'état  $S$  et  $C$ , de calculer la valeur actuelle nette de l'investissement, et de créer une matrice de valeur initiales,  $oldvop[i][j]$ . Ces valeurs initiales sont déterminées en respectant la condition selon laquelle, à l'échéance de l'option, sa valeur est soit nulle, soit égale à la valeur actuelle nette de l'investissement.

- Boucle en temps : à chaque pas de temps  $n$ , on considère deux phases correspondant chacune à un sous-pas de temps. Deux sous-systèmes sont résolus.

- 1<sup>ère</sup> phase de la résolution : boucle en  $i$

La première phase de la résolution correspond au sous-pas de temps intermédiaire et permet de calculer une matrice de valeurs intermédiaires  $intvop[i][j]$ . Ces valeurs, ainsi que celles de  $oldvop[i][j]$ , sont utilisées dans la seconde phase.

- 2<sup>ème</sup> phase de la résolution : boucle en  $j$

A la fin de cette seconde phase, une matrice de valeurs  $newvop[i][j]$  est déterminée. La matrice  $newvop[i][j]$  devient la matrice  $oldvop[i][j]$  de la prochaine boucle en temps. Cette matrice respecte la condition associée à une option d'achat américaine.



### 3.2. PRESENTATION DU PROGRAMME

• **Initialisation :**

*Paramètres :*  $I_o, C_p, \sigma_S, \sigma_C, \rho, \kappa, \alpha, \lambda, r, h, k, m, nn$

*Variables d'état :*  $S_{in}, C_{in}$

*Calcul de  $\beta_1$  et de  $\beta_2$ , nécessaires à la détermination de la VAN et de certaines conditions aux limites*

$$\beta_1 = \sum_{nn=1}^{10} e^{-mn} ; \beta_2 = C_p \beta_1 + I_o$$

*Calcul de la VAN (matrice)*

$$van[i][j] = \sum_{nn=1}^{10} (F^{nn}(ih, jh) \times e^{-mn}) - \beta_2$$

*Détermination des valeurs de S et de C pour lesquelles  $van[i][j]$  s'annule*

*Matrice de valeurs initiales oldvop[i][j]*

Pour i allant de 0 à m,

    Pour j allant de 0 à m,

$$oldvop[i][j] = \max(van[i][j], 0)$$

    Fin de la boucle en j

Fin de la boucle en i

$$\text{Calcul de } \hat{\alpha} : \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

*Calcul de coefficients utilisés dans les matrices M, et dans le vecteur d[j]*

$$R = \frac{2 + rk}{2} ; T = \frac{2 - rk}{2R}$$

*Calcul des coefficients de la matrice M utilisée dans la première phase. Trois vecteurs a[j], b[j], c[j] sont construits*

$$a[0] = 0 ; b[0] = 1 ; c[0] = 0$$

$$a[m] = 0 ; b[m] = 1 ; c[m] = 0$$

Pour j = 1 à (m-1) :

$$ww = \dots ; zz = \dots$$

$$a[j] = zz - ww$$

$$b[j] = 1 + 2 \, ww$$

$$c[j] = -zz - ww$$

Fin de la boucle en j.

• **Boucle en temps** : pour  $n = 1$  à  $nn$

• **1<sup>ère</sup> phase** :

Détermination des valeurs de la matrice  $intvop[i][j]$  lorsque  $i = 0$

Pour  $j = 0$  à  $m$ ,

$$intvop[0][j] = 0$$

Fin de la boucle en j.

**Pour  $i = 1$  à  $(m - 1)$**

Calcul des vecteurs  $d[j]$  nécessaires à la résolution du système

$$d[0] = m \times h$$

$$d[m] = 0$$

Pour  $j = 1$  à  $(m - 1)$

$$vv = \dots ; ww = \dots ; xx = \dots ; yy = \dots ; zz = \dots ;$$

$$\begin{aligned} d[j] = & oldvop[i][j] \times (T - 4vv - 2ww) \\ & + oldvop[i+1][j] \times (2vv + 2yy) \\ & + oldvop[i-1][j] \times (2vv - 2yy) \\ & + oldvop[i][j+1] \times (ww + zz) \\ & + oldvop[i][j-1] \times (ww - zz) \\ & + 2xx \times (oldvop[i+1][j+1] + oldvop[i-1, j-1]) \\ & - 2xx \times (oldvop[i-1][j+1] + oldvop[i+1][j-1]) \end{aligned}$$

Fin de la boucle en j.

Détermination des valeurs de la matrice  $intvop[i][j]$  lorsque  $i = m$

Pour  $j = 0$  à  $m$ ,

$$intvop[m][j] = m \times h$$

Fin de la boucle en j

Résolution du système  $M U = d$ .

**Fin de la boucle en i.**

Pour chaque valeur de  $i$ , on obtient un vecteur  $u[j]$  solution du système. Ces vecteurs constituent les lignes de la matrice  $intvop[i][j]$

• **2<sup>ème</sup> phase** :

**Pour j = 0 à m**

*Détermination de la matrice M et du vecteur d*

$$a'[0] = 0 ; b'[0] = 1 ; c'[0] = 0 ; d'[0] = 0 ;$$

Pour i = 1 à (m-1) :

*Construction des trois vecteurs a'[i], b'[i], c'[i] de la matrice M*

$$vv = \dots ; yy = \dots ;$$

$$a'[i] = yy - vv$$

$$b'[i] = 1 + 2vv$$

$$c'[i] = -yy - vv$$

*Calcul des vecteurs d'[i]*

$$\begin{aligned} d'(i) = & \text{intvop}[i][j] \\ & + \text{oldvop}[i+1][j] \times (-yy - vv) \\ & + \text{oldvop}[i][j] \times (2vv) \\ & + \text{oldvop}[i-1][j] \times (-vv + yy) \end{aligned}$$

Fin de la boucle en i.

$$a'[m] = 0 ; b'[m] = 1 ; c'[m] = 0 ; d'[m] = m \times h ;$$

*Résolution du système M U = d'.*

**Fin de la boucle en j.**

*Pour chaque valeur de j, on obtient un vecteur u[i] solution du système. Ces vecteurs constituent les colonnes de la matrice newvop[i][j].*

*Cette matrice doit respecter la condition associée à une option de type américain : newvop[i][j] = max(van[i][j], newvop[i][j])*

Pour i = 0 à m,

Pour j = 0 à m,

Si newvop[i][j] < van[i][j], alors

$$\text{newvop}[i][j] = \text{van}[i][j]$$

$$\text{oldvop}[i][j] = \text{newvop}[i][j]$$

Fin de la boucle en j

Fin de la boucle en i

*Recherche des valeurs de S et de C telles que newvop[i][j] = van[i][j]*

**Fin de la boucle n = 1.**



## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1. Frontière efficiente.....	42
Figure 1.2. Proportion optimale de couverture d'un stock individuel.....	43
Figure 1.3. Frontière efficiente et portefeuille de marché.....	47
Figure 2.1. Fonction d'offre de stockage.....	71
Figure 2.2. Fonction d'offre de stockage complète.....	72
Figure 2.3. Coût pur de stockage.....	80
Figure 2.4. Rendement de couverture.....	81
Figure 2.5. Coût marginal de détention des stocks.....	82
Figure 2.6. Courbe d'offre de stockage pour les stocks de café certifiés.....	107
Figure 4.1. Modèle BG, impact d'une variation du taux d'intérêt.....	174
Figure 4.2. Modèle BG, impact d'une variation du <i>convenience yield</i> .....	174
Figure 4.3. Modèle MR, impact d'une variation du <i>convenience yield</i> .....	177
Figure 4.4. Modèle MR, impact d'une variation du taux d'intérêt.....	179
Figure 4.5. Modèle MR, impact d'une variation de la force de rappel.....	180
Figure 4.6. WTI, exemples de structures par terme des prix observées.....	181
Figure 4.7. Dynamique du <i>convenience yield</i> lorsque $\beta = 1$ et lorsque $\beta = 0$ .....	183
Figure 4.8. Ecart entre <i>convenience yields</i> lorsque $\beta = 1$ et $\beta = 0$ .....	183
Figure 4.9. Modèle AS, impact d'une variation du coefficient d'asymétrie.....	184
Figure 5.1. Prix à terme observés / prix à terme estimés, 1991-1995.....	215
Figure 5.2. Innovations, période 1991-1995.....	216
Figure 5.3. Fonction de distribution de $\tilde{C}$ pour $\beta = 0,8$ .....	223
Figure 5.4. Prix à terme estimés / observés, modèles MR et AS, 1995-1998.....	225

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1. Principaux modèles de structure par terme des prix des commodités	154
Tableau 4.1. Valeurs des paramètres et des variables d'état utilisées pour les simulations	173
Tableau 4.2. : Rapidité de la stabilisation de la courbe des prix en fonction de l'écart entre C et $\alpha$	178
Tableau 5.1. Paramètres optimaux, période 1991-1995	213
Tableau 5.2. Paramètres optimaux, période 1995-1998	213
Tableau 5.3. Filtres de Kalman simple / étendu, période 1991-1995	214
Tableau 5.4. Filtres de Kalman simple / étendu, période 1995-1998	215
Tableau 5.5. Filtres de Kalman simple / étendu, tests sur trois mois, 1995	217
Tableau 5.6. Filtres de Kalman simple / étendu, tests sur trois mois, 1998	218
Tableau 5.7. Filtres de Kalman simple / étendu, tests sur six mois, 1995-1996	218
Tableau 5.8. Filtres de Kalman simple / étendu, tests sur six mois, 1998	219
Tableau 5.9. Filtres de Kalman étendu avec et sans simulations, 1995-1998	220
Tableau 5.10. Filtre de Kalman étendu avec 100 et 1000 simulations	221
Tableau 5.11. Comparaison des performances des modèles MR et AS, 1995-1998	225
Tableau 6.1. Valeur actuelle nette en fonction du taux d'actualisation et des hypothèses de prix retenues	252
Tableau 6.2. Valeur actuelle nette pour différentes conditions d'exploitation	253
Tableau 6.3. Modèle BG, valeur de l'option pour différents niveaux de prix au comptant, de <i>convenience yield</i> et de taux d'intérêt	254
Tableau 6.4. Modèle BG, valeur de l'option pour différentes conditions d'exploitation	254
Tableau 6.5. Modèle MR, valeur de l'option pour différents niveaux de prix	

au comptant, de convenience yield et de taux d'intérêt .....	255
Tableau 6.6. Modèle MR, valeur de l'option pour différents niveaux de $\kappa$ .....	256
Tableau 6.7. Modèle MR, valeur de l'option pour différentes conditions d'exploitation .....	256
Tableau A6.1. Données de prix utilisées pour les estimations, 1991-1995 .....	359
Tableau A6.2. Données de prix utilisées pour les tests en extrapolation sur trois mois, 1995 .....	359
Tableau A6.3. Données de prix utilisées pour les tests en extrapolation sur six mois, 1995 .....	359
Tableau A6.4. Données de prix utilisées pour les estimations, 1995-1998 .....	360
Tableau A6.5. Données de prix utilisées pour les tests en extrapolation sur trois mois, 1998 .....	360
Tableau A6.6. Données de prix utilisées pour les tests en extrapolation sur six mois, 1998 .....	360
Tableau A6.7. Taux des bons du Trésor américain à trois mois utilisés pour les estimations .....	360

## TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE .....	9
INTRODUCTION GENERALE .....	11
PREMIERE PARTIE : LES THEORIES TRADITIONNELLES DES PRIX	
DES COMMODITES .....	25
<b>Introduction de la première partie</b> .....	27
<b>Chapitre 1 : La théorie du déport normal</b> .....	29
Section 1 : La théorie du déport normal .....	30
1.1. Exposé de la théorie du déport normal .....	30
1.2. Critiques de la théorie du déport normal .....	32
1.2.1. Analyse des anticipations et théorie du déport normal .....	32
1.2.2. Analyse de la prime de risque .....	36
1.2.3. La fonction de transfert de risque des marchés à terme .....	38
1.3. Conclusion .....	39
Section 2. L'apport de la théorie des marchés financiers .....	39
2.1. Analyse du comportement individuel d'optimisation .....	40
2.1.1. Principes généraux de la théorie du portefeuille .....	40
2.1.2. Application aux marchés de commodités : les modèles de Johnson et Stein .....	42
2.1.3. Conclusion .....	44
2.2. Une nouvelle approche de la prime de risque .....	45
2.2.1. Présentation du CAPM .....	45
2.2.2. Applications aux marchés de commodités .....	49
2.2.3. Portée et limites de la théorie des marchés financiers appliquée aux marchés de commodités .....	51
Section 3. Tests empiriques directs de la théorie du déport normal .....	53
3.1. Implications testables de la théorie du déport normal .....	54
3.2. La réfutation de la théorie du déport normal par Working .....	55
3.3. Evolution des prix à terme et saisonnalité .....	57



3.4. Analyse des rendements des contrats à terme.....	58
3.5 Les tests incluant le marché pétrolier.....	58
3.5.1. Les caractéristiques du marché pétrolier.....	59
3.5.2 Les résultats des études empiriques.....	60
Section 4. Conclusion.....	60
<b>Chapitre 2 : La théorie du stockage.....</b>	<b>63</b>
Section 1. Explication des situations de report et de déport.....	64
1.1. Les relations d'arbitrage.....	64
1.2. Analyse du report.....	66
1.3. Déport et <i>convenience yield</i> .....	68
1.4. Le « prix » du stockage.....	70
1.4.1. Rendement du stockage et fonction d'offre de stockage.....	70
1.4.2. Rendement du stockage et théorie des anticipations.....	74
Section 2. L'analyse du <i>convenience yield</i> .....	75
2.1. <i>Convenience yield</i> et prime de risque.....	76
2.2. Rendement de réserve et rendement de couverture.....	79
2.3. <i>Convenience yield</i> , contrats <i>forward</i> et contrats à terme.....	83
Section 3. Validation empirique de la théorie du stockage.....	85
3.1. Implications testables de la théorie du stockage.....	86
3.2. Les tests réalisés (hors pétrole).....	88
3.2.1. Analyse des commodités agricoles.....	88
3.2.2. Commodités saisonnières et commodités industrielles : les études de Fama et French (1987 et 1988).....	89
3.2.3. Les tests réalisés hors pétrole : conclusion.....	93
3.3. L'application de la théorie du stockage au marché pétrolier.....	93
3.3.1. Caractéristiques du marché pétrolier.....	94
3.3.2. Les études réalisées sur les marchés pétroliers.....	96
3.3.3. Conclusion.....	99
Section 4. Critiques de la théorie du stockage.....	100
4.1. <i>Convenience yield</i> et nature des stocks.....	100
4.1.1. Nature des stocks.....	100

4.1.2. Segmentation du marché et agrégation des données.....	101
4.2. Les coûts de transformation.....	103
4.2.1. Les motifs de détention des stocks .....	103
4.2.2. La théorie des coûts de transformation.....	104
Section 5. Conclusion.....	108
<b>Conclusion de la première partie</b> .....	<b>113</b>
SECONDE PARTIE : LES MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES	
PRIX DES COMMODITES.....	115
<b>Introduction de la seconde partie</b> .....	<b>117</b>
<b>Chapitre 3. Les modèles de structure par terme des</b>	
<b>    commodités : une revue de la littérature</b> .....	<b>119</b>
Section 1. Extension au long terme de l'analyse proposée par les théories	
traditionnelles.....	120
1.1. La théorie du déport normal.....	120
1.2. La théorie du stockage.....	121
1.3. Conclusion.....	122
Section 2. Les variables d'état dans les modèles de structure par terme	
des prix des commodités.....	123
2.1. Le prix au comptant.....	123
2.1.1. Méthodes d'approximation du prix au comptant.....	124
2.1.2. Dynamique du prix au comptant.....	125
2.1.3. Prime de risque associée au prix au comptant.....	128
2.1.4. Conclusion.....	129
2.2. Le prix à long terme.....	130
2.2.1 Méthode d'approximation du prix à long terme.....	131
2.2.2.Dynamique du prix à long terme.....	131
2.2.3. Conclusion.....	132
2.3. Le <i>convenience yield</i> .....	133
2.3.1. Définition du <i>convenience yield</i> .....	133
2.3.2. Les différentes approximations du <i>convenience yield</i> .....	135
2.3.3. Structure par terme des <i>convenience yields</i> .....	142

2.3.4. Conclusion .....	143
2.4. Le taux d'intérêt .....	145
Section 3. Performances des modèles de structure par terme des prix .....	147
3.1. Modèles monofactoriels .....	148
3.2. Modèles à deux facteurs .....	149
3.3. Modèles à trois facteurs .....	149
Section 4. Conclusion .....	150

## **Chapitre 4. Trois modèles de structure par terme des prix ;**

<b>une comparaison .....</b>	<b>155</b>
Section 1. Présentation des modèles .....	155
1.1. Modèle de Brennan et Schwartz (BG) .....	156
1.1.1. Dynamique des états .....	157
1.1.2. Comportement dynamique du prix à terme .....	157
1.1.3. Raisonnement d'arbitrage .....	159
1.1.4. Equation fondamentale de valorisation .....	162
1.2. Modèle de Schwarz (MR) .....	163
1.2.1. Dynamique des états .....	164
1.2.2. Comportement dynamique du prix à terme .....	165
1.2.3. Raisonnement d'arbitrage .....	166
1.2.2. Equation fondamentale de valorisation .....	168
1.3. Modèle asymétrique (AS) .....	169
1.3.1. Dynamique des états .....	169
1.3.2. Equation fondamentale de valorisation .....	171
Section 2. Simulations .....	172
2.1. Modèle BG .....	173
2.1.1. Sensibilité aux variations du taux d'intérêt .....	173
2.1.2. Sensibilité aux variations du <i>convenience yield</i> .....	174
2.1.3. Conclusion .....	175
2.2. Modèle MR .....	176
2.2.1. Structures par terme des prix pour différents niveaux de <i>convenience yield</i> .....	177

2.2.2. Sensibilité aux variations du taux d'intérêt.....	178
2.2.3. Sensibilité aux variations de la force de rappel $\kappa$ .....	179
2.2.4. Conclusion .....	180
2.3. Modèle AS.....	182
2.3.1. Dynamique du <i>convenience yield</i> .....	182
2.3.1. Impact d'une variation du coefficient d'asymétrie .....	184
2.3.3. Conclusion .....	184
Section 3. Conclusion.....	185
<b>Conclusion de la seconde partie</b> .....	187
 TROISIEME PARTIE : APPLICATIONS AU MARCHE DU PETROLE BRUT .....	189
<b>Introduction de la troisième partie</b> .....	191
<b>Chapitre 5. Etude comparative des performances du modèle de</b>	
<b>Schwartz et du modèle asymétrique</b> .....	193
Section 1. Reconstitution des séries de données non observables et	
estimation des paramètres .....	194
1.1. Le filtre de Kalman .....	194
1.2. Le filtre de Kalman simple.....	197
1.2.1. Présentation du filtre de Kalman simple.....	197
1.2.2. Filtre de Kalman simple appliqué au modèle MR.....	199
1.3. Le filtre de Kalman étendu.....	201
1.3.1. Présentation du filtre de Kalman étendu.....	202
1.3.2. Application du filtre de Kalman étendu au modèle AS .....	204
1.4. Estimation des paramètres.....	206
1.4.1. Calcul du maximum de vraisemblance .....	207
1.4.2. Optimisation avec simulation .....	208
Section 2. Données utilisées .....	209
Section 3. Tests préliminaires.....	210
3.1. Comparaison des résultats obtenus avec les deux filtres de Kalman.....	211
3.1.1 Critères de performance.....	211
3.1.2 Etude sur la base d'apprentissage.....	212
3.1.3. Tests en extrapolation sur des périodes de 3 et 6 mois.....	217

3.1.4. Conclusion .....	219
3.2. Comparaison des résultats obtenus avec et sans simulations .....	220
Section 4. Comparaison des performances des modèles MR et AS .....	221
4.1. Etudes préalables du modèle AS .....	222
4.1.1 Etude de la valeur du coefficient d'asymétrie .....	222
4.1.2. Etude des autres paramètres associés au <i>convenience yield</i> .....	223
4.2. Comparaison des performances des modèles MR et AS .....	224
Section 5. Conclusion .....	226
<b>Chapitre 6. Etude de projets d'investissement</b> .....	229
Section 1. Analyse des projets d'investissement : l'approche traditionnelle .....	230
1.1. Evaluation des flux associés à un projet .....	230
1.1.1.Evaluation de l'investissement initial .....	231
1.1.2.Les flux d'exploitation .....	231
1.2.3. La valeur résiduelle du projet .....	232
1.2. Les critères de choix d'investissement .....	232
1.2.1.Délai de retour sur investissement .....	232
1.2.2.Valeur actuelle nette .....	233
1.2.3.Taux interne de rendement .....	235
1.3. L'actualisation des flux futurs .....	236
1.3.1.L'inflation .....	236
1.3.2.Le coût du capital .....	236
1.3.3.La mesure du risque .....	238
1.4. Conclusion .....	239
Section 2. L'approche optionnelle de l'investissement .....	240
2.1 La valorisation des flux futurs .....	240
2.2. L'actualisation .....	241
2.3. Le caractère optionnel des décisions d'investissement .....	242
2.4. La loi d'investissement dans l'approche optionnelle .....	242
2.5. Conclusion .....	243
Section 3. Comparaison des approches traditionnelles et optionnelles .....	243
3.1. Le cadre d'analyse .....	244

3.2. Etude d'un projet d'investissement .....	245
3.2.1. Détermination de la valeur actuelle nette.....	245
3.2.2. L'approche optionnelle de l'investissement .....	246
3.3. Comparaison des résultats obtenus à partir de chaque méthode .....	251
3.3.1. Méthode traditionnelle .....	252
3.3.2. Méthodes optionnelles .....	253
Section 4. Conclusion.....	256
<b>Conclusion de la troisième partie</b> .....	259
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	261
<b>Bibliographie</b> .....	273
<b>Annexes</b> .....	289
Annexe 1. Principes mathématiques utilisés .....	291
Annexe 2. Modèles de structure par terme des taux d'intérêt.....	301
Annexe 3. Solution analytique du modèle BG .....	323
Annexe 4. Solution analytique du modèle MR.....	327
Annexe 5. Modèle AS.....	339
Annexe 6. Données utilisées .....	359
Annexe 7. Programme utilisé pour le filtre de Kalman simple.....	361
Annexe 8. Programme utilisé pour le filtre de Kalman étendu.....	373
Annexe 9. Méthode de résolution numérique utilisée pour le modèle MR .....	393
<b>Liste des tableaux et figures</b> .....	411
<b>Table des matières détaillée</b> .....	415